ПРОФЕССОР
С. А. БОГОМОЛОВ

ЭВОЛЮЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МЫСЛИ

«НАЧАТКИ ЗНАНИЙ»
ЛЕНИНГРАД
1928

Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

ЭВОЛЮЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МЫСЛИ

С 66-Ю ЧЕРТЕЖАМИ

КУЛЬТУРНО - ПРОСВЕТИТЕЛЬНОЕ
КООПЕРАТИВНОЕ Т-ВО
«НАЧАТКИ ЗНАНИЙ»
ЛЕНИНГРАД
1928

Ленинградский Областлит № 48046. — 14 печ. л. — Тираж 4150.
Государственная Академическая Типография. В. О., 9 линия 12.
Ленинград.

Предисловие.

Предлагаемая вниманию читателя книга не есть история геометрии. Придерживаясь в общих чертах исторической последовательности, автор намерен выяснить те основные этапы, которые прошла геометрическая мысль с древнейших времен до настоящего момента. Таких этапов мы насчитываем шесть: 1) зачаточное состояние геометрии (древний Египет), 2) создание науки в древней Греции, 3) аналитическая геометрия Декарта, 4) развитие проективной геометрии, 5) построение неевклидовых систем, 6) современные воззрения на основы геометрии. Соответственно этому перечню, книга содержит 6 глав, которые по своим размерам делятся на 2 группы. Небольшие размеры 1-й главы не требуют особых объяснений; точно так же невелики и 2 следующие, так как здесь можно было отчасти опираться на сведения, вынесенные читателем из средней школы. Но 3 последних главы потребовали значительно больше места, — вследствие малого знакомства неспециалистов с этими вопросами и в силу их огромной принципиальной важности. Даже для правильного понимания владеющего ныне умами принципа относительности необходимо знакомство с современными течениями в области геометрии.

С. Богомолов.

I. Предварительное накопление знаний.

Если мы рассмотрим любую вполне сложившуюся науку, то сейчас же подметим три следующие черты, необходимо ей присущие. Во-первых, ее утверждения должны быть истинными; как известно, наши суждения считаются истинными, если они согласуются или с действительностью (в случае, когда мы изучаем нечто реально существующее), или друг с другом (в случае, когда дело идет о свободном создании нашего ума). Во-вторых, эта истинность не является чем-то случайным, а должна быть установлена со всею строгостью при помощи тех методов, которые присущи данной науке; если последняя принадлежит к числу опытных наук (как физика или химия), то доказательство дается при посредстве опыта; а если мы имеем дело с наукой умозрительной (как логика или геометрия), то доказательство сводится к цепи умозаключений. В-третьих, положения рассматриваемой науки должны быть приведены в систему, т.-е. они не должны быть рядом предложений, лишь механически связанных друг с другом; напротив того, они должны быть объединены в органическое целое единством плана и единством метода, позволяющими постигать взаимную зависимость отдельных частей; такая систематизация знаний не только удовлетворяет эстетическим требованиям, которые, к слову сказать, всегда были сильны у настоящих математиков, но и дает возможность лучше усвоить материал и предугадать дальнейшие возможности.

Но таковы лишь черты сложившейся науки; на первоначальной стадии своего развития она ими не обладает. Каждая наука, даже самая отвлеченная, возникла под давлением известных жизненных потребностей; первые положения ее являются ответами на те вопросы, которые жизнь на каждом шагу ставит человеку; он отвечает на них как умеет, не особенно заботясь о строгости доказательств и о приведении своих знаний в систему. Должен был пройти долгий период предварительного накопления знания и должна была появиться у человечества высшая потребность — знания ради знания — для того, чтобы создались необходимые предпосылки истинно-научного метода.

Геометрия, как отрасль чистой математики, принадлежит к самым точным и отвлеченным наукам; тем не менее она должна была пройти через такую же предварительную стадию. Эта последняя запечатлена в самом названии нашей науки, указывающем на те практические потребности, которые ближайшим образом вызвали ее к жизни: „геометрия“ по-гречески значит „землемерие“. Начальные геометрические сведения несомненно имелись у всех народов и не только у них; всякое животное, напр., практически знает, что „прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками“. Но тогда как одни из них пошли немногим дальше животных, другие прошли целиком период предварительного накопления знания и только на пороге создания настоящей науки уступили место другим народам, более их способным к отвлеченному знанию. Вот такой предварительный период в развитии геометрии мы чрезвычайно отчетливо видим в древнем Египте, который считается колыбелью нашей науки.

Один из древних историков геометрии говорит: „...Геометрия, по свидетельству весьма многих, была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это

измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нила, постоянно смывавшего границы"*). В таком же смысле высказывается и знаменитый историк Геродот. Об объеме и характере геометрических сведений у египтян прежде всего можно судить по одному древнему папирусу (около 2000 л. до начала нашей эры), который заключает в себе математическое руководство, переписанное ученым писцом Ахмесом**).

Геометрические сведения излагаются в этой рукописи на ряде задач с численными данными, носящими, следовательно, совершенно частный характер; какие-либо объяснения или доказательства правильности решения совершенно отсутствуют: ученик должен усвоить правило, переданное предками, и благоговейно склониться перед их мудростью.

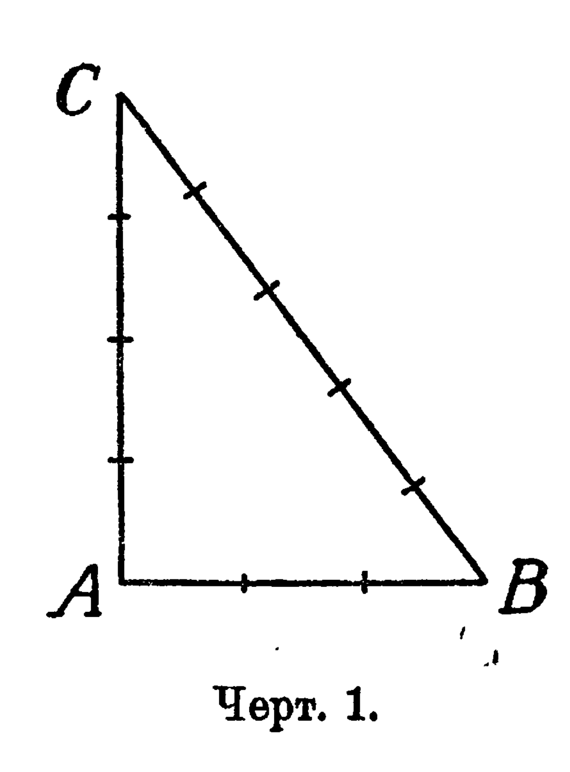
После сказанного выше мы не удивимся, что главный интерес сосредоточен на измерении различных фигур. Прежде всего мы встречаемся с совершенно правильным предписанием для вычисления площади квадрата: в одной из задач говорится, что если сторона квадрата равна 10, то его площадь равна 100. Но уже с площадью равнобедренного треугольника дело обстоит несколько хуже; автор рассматривает треугольник с основанием $=4$ и с боковыми сторонами $=10$ и утверждает, что его площадь равна 20. Здесь он, очевидно, берет половину произведения основания на боковую сторону, тогда как нужно половину основания умножить на высоту, и в данном

*) Цитирую по книге: В. Ф. Каган. „Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907, стр. 1.

**) Читатель, интересующийся подробностями в историческом развитии геометрии, найдет их в классической 4-томной истории математики M. Cantor'а, а у нас—в сочинениях проф. Ващенко-Захарченко, Бобынина и в переводных: Зутера, Кэджори и других.

случае правильный ответ будет $8\sqrt{6}$, что приближенно равно 19,6. Таким образом результат не точен, но он может иногда вполне удовлетворить практическим потребностям; однако ошибка будет тем больше, чем меньше углы при основании равнобедренного треугольника.

Для вычисления площади круга автор дает следующее правило: надо от диаметра отнять $^1/_9$ часть его и остаток возвысить в квадрат. Такое правило сводится к тому, что за отношение окружности к диаметру (число π) принимается дробь $^{256}/_{81}$ или 3,16 (приближенно), тогда как с точностью до 2 десятичных знаков π равно 3,14 и оно не может быть точно выражено отношением целых чисел. Мы снова видим, что утверждение Ахмеса не совсем точно; однако оно во многих случаях может вполне удовлетворить землемера или инженера. По поводу измерения площадей интересно упомянуть об одном приеме, который применялся в древности, в том числе и у нас на Руси; именно, землемерами принималось, что две площади будут равными, если равны длины ограничивающих их линий. Утверждение явно неверное; однако в известных пределах, при определенной форме измеряемых площадей, оно может повести к результатам, имеющим практическую ценность.



Черт. 1.

Возвращаясь к египетской геометрии, отметим интересный способ, с помощью которого они строили перпендикуляры. Проведение прямой, образующей с данной прямой угол в 90° („прямой“ угол), бывает часто необходимо при землемерных и инженерных работах; для решения этой задачи египтяне пользовались одним известным

им частным случаем знаменитой теоремы Пифагора. Если взять прямоугольный $\Delta\ ABC$ (черт. 1, где при вершине A имеется прямой угол), то сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$(AB)^2+(AC)^2=(BC)^2;$$

в этом и заключается теорема Пифагора, выражающая существенное свойство прямоугольного треугольника. Существуют далее треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, удовлетворяющими указанному выше соотношению; египтяне знали один из простейших случаев, а именно — треугольник со сторонами, равными 3, 4, 5. Так как мы действительно имеем:

$$3^2+4^2=5^2,$$

то такой треугольник будет иметь прямой угол, противолежащий наибольшей стороне. Если сделать такой треугольник (черт. 1) из какого-либо материала, то можно им пользоваться для построения перпендикуляров; можно также взять веревку длиною в 12 единиц длины и натягивать ее соответствующим образом.

Далее, в рукописи Ахмеса мы находим несколько задач на вычисление соотношений между элементами пирамид, причем обнаруживается, что египтяне умели определять угол прямоугольного треугольника по отношению катетов; в этом можно видеть первый намек на тригонометрию. Интересно также отметить, что египетские художники, желая изобразить что-либо в уменьшенном размере, применяли деление площади на равные маленькие квадраты и пользовались ими, как опорой, при своих построениях. Отсюда явствует, что египтяне имели представление о подобии фигур, а последний прием является

как бы отдаленным предчувствием метода координат — гениального изобретения Декарта*).

Таким образом мы убеждаемся, что познания египтян в области геометрии не были совсем уже ничтожными. О том же свидетельствуют их памятники: народ, построивший храмы, развалины которых напоминают города, исполинские статуи и пирамиды, должен был обладать известным запасом геометрических знаний. Но в руках египтян геометрия — еще не математическая дисциплина, а скорее расширенное „землемерие"; это — не сложившаяся наука, а зародыш ее, переживающий стадию предварительного накопления фактов. Действительно, на ряду с утверждениями безусловно правильными, встречаем другие, имеющие лишь приближенный характер; между тем никакого различия между ними не делается. Далее, автору рукописи совершенно не приходит в голову оторвать свои правила от частных численных примеров и высказать их в общем виде; точно так же он не чувствует потребности в строгих доказательствах: авторитет учителя и практическая применимость этих правил вполне его удовлетворяют. Наконец, нет и не может быть речи ни о какой систематизации отдельных предписаний, выраженных в совершенно частной форме. Таким образом в египетской геометрии отсутствуют все черты, создающие истинную науку.

Но если в древнем Египте мы имеем дело только с „подготовительным" или с „пропедевтическим" курсом геометрии (если будет позволено применить термин современной методики), то этот предварительный период был изжит египетскими мудрецами до конца. Они накопили такое количество знаний, что умы, более способные к обобщениям и отвлечениям, могли уже положить их в основу

*) См. главу III.

более научных построений. Однако египтяне в течение тысячелетий не смогли подняться на эту высшую ступень; их практический ум тянул к непосредственной пользе, и в преддверии настоящей науки они должны были уступить место другому великому народу.

II. Создание науки.

Примерно за 6 столетий до начала нашей эры первые геометрические сведения были перенесены из Египта в Грецию; древние авторы связывают этот перенос с именем Фалеса, основателя известной философской школы. Рассказывают, что во время своего путешествия в Египет он усвоил жреческую мудрость и даже превзошел своих учителей, измерив высоты пирамид по их тени*). О работах Фалеса мы знаем, конечно, очень мало; но Прокл утверждает, что он доказал следующие теоремы:

a) вертикальные углы равны;

b) углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой;

c) диаметр делит круг пополам, и другие.

О доказательствах этих теорем мы ничего не знаем; неизвестно даже, дал ли Фалес нечто подобное доказательству. Тем не менее нетрудно уже здесь подметить значительный шаг вперед по сравнению с руководством Ахмеса. Это новое заключается в самой формулировке геометрических предложений: они оторваны от непосредственных практических приложений, не имеют прямой

---

*) Сделать это Фалес мог, напр., так: выждать то время дня, когда длина тени человека равна его росту, и измерить длину тени, отбрасываемой пирамидой. Пользуясь свойствами подобных треугольников, можно было достигнуть той же цели в любое время дня.

связи с „землемерием“ и высказаны в совершенно общем виде.

Полстолетия спустя в Греции жил и учил, окруженный легендами, знаменитый математик и философ Пифагор; о нем тоже передают, что курс учения был пройден им в Египте. В школе Пифагора был значительно расширен материал нашей науки; достаточно будет вспомнить о теореме, носящей его имя, и упомянуть о двух открытиях: вычисление суммы углов треугольника и знакомство с „космическими телами“, т.-е. с пятью правильными многогранниками. Прокл говорит даже о том, что Пифагор преобразовал геометрию в смысле ее строго-логической обработки; но более определенных указаний на этот счет мы не имеем.

В противоположность своим египетским учителям, Фалес и Пифагор не были заинтересованы в непосредственных приложениях своих открытий. Принося, по преданию, богам гекатомбу в благодарность за открытие своей знаменитой теоремы, Пифагор был полон энтузиазма к чистому знанию и не спрашивал, к чему это может послужить на практике. Такая постановка вопроса, которой осталась верна греческая наука, повела к удивительным последствиям: в течение нескольких столетий греки неизмеримо опередили своих учителей-египтян, занимавшихся геометрией в продолжение тысячелетий. Впоследствии греческие ученые применили свои теоретические достижения к практическим нуждам и сразу достигли замечательных результатов; достаточно упомянуть об их успехах в геодезии и в астрономии, а также об открытиях Архимеда. Но в общем греческих ученых можно упрекнуть в другой крайности, а именно — в полном пренебрежении к тому, что касалось интересов повседневной жизни.

Пополнение геометрических знаний шло рука об руку

с постепенной научной обработкой их. Характерной чертой эллинского ума была способность и любовь к отвлеченному мышлению; вспомним создание знаменитых философских систем у Платона и Аристотеля. С другой стороны, памятники этого народа свидетельствуют о глубоких эстетических потребностях, проникавших всю его жизнь. Поэтому геометрия должна была особенно прийтись по душе древнему греку и оказаться в числе его наиболее характерных творений: здесь отвлеченные построения мысли воплощались в наглядные картины наиболее совершенным образом; симметричные формы шара и правильных многогранников удовлетворяли эстетическому чувству, свидетельствуя в то же время о мощности создавшей их мысли. Не удивительно, что в те времена изучение геометрии считалось необходимой предпосылкой всякой высшей мыслительной деятельности; известно, что Платон на дверях начертал надпись, запрещавшую переступать порог Академии всем тем, кто был чужд геометрии.

После изложенного не покажется удивительным, что в течение 3 столетий была завершена переработка геометрических сведений в строго-научную систему; результатом подобных исследований явились „Начала" Евклида (300 л. до Р. Хр.), которым было уготовано совершенно исключительное место в истории человеческого знания: в течение двух тысячелетий с лишком эта книга считалась непревзойденным никем изложением геометрии, и на изучении ее формировались умы целого ряда выдающихся математиков*). Надо помнить, что „Начала" Евклида вовсе не заключали в себе полного собрания геометриче-

*) На русском языке имеются переводы „Начал"; последним по времени является перевод проф. Ващенко-Захарченко, снабженный примечаниями и дополнениями. Вообще же лучшим в настоящее время считается издание Heiberg'a.

ских знаний его времени; это было систематическое изложение элементарной геометрии, а на ряду с последней существовала высшая, которой принадлежат труды Архимеда и Аполлония и которая занималась вопросами, разрабатываемыми (правда, иными методами) и теперь в высшей школе. „Начала“ заключали 13 книг, и общее представление о их содержании и даже о способе изложения читатель может составить по своим воспоминаниям о курсе геометрии в средней школе; впрочем, имеется одно существенное отличие, о котором скажем несколько ниже.

Итак, по мысли Платона, изучение элементарной геометрии должно быть не только первой ступенью при занятиях математикой, но и введением в философию. Поэтому автор „Начал“ должен был обратить особенное внимание на те стороны своего изложения, которые обеспечили ему славу строгой научности. Для того, чтобы оценить сделанное Евклидом в геометрии, отдадим себе отчет в том методе, по которому должна строиться эта наука.

Как мы знаем, геометрия относится к умозрительным наукам; это значит, что ее предложения доказываются с помощью цепи умозаключений, без всякой ссылки на опыт; такая ссылка на опыт показала бы, что данное лицо или данный народ переживают еще предварительную стадию накопления фактов. Приглядываясь к доказательству любой теоремы, можно сейчас же подметить, что точкой опоры служат предложения, доказанные раньше: сочетая их по законам, которые изучаются в логике, мы обнаруживаем в конце концов истинность рассматриваемого утверждения. Если далее мы перейдем к тем предложениям, которые послужили сейчас точкой опоры, то убедимся, что они точно так же основываются на предложениях, доказанных еще раньше, и т. д. Продолжая эти

рассуждения, мы все более и более восходим к началу курса; а так как между выбранной первоначально теоремой и началом курса по необходимости находится конечное число теорем, то в конце концов мы доберемся до предложений, стоящих в самом начале геометрии; это и будет концом нашего восходящего ряда. Но самое первое предложение уже нельзя доказать по предыдущему способу, ибо ранее доказанных предложений здесь нет и нам не на что опереться при доказательстве; следовательно это предложение придется принять без доказательства. Отсюда вытекает, что в основе геометрии должно лежать, по крайней мере, одно недоказуемое предложение; ближайшее исследование показывает, что таких предложений будет несколько.

Предложения, принимаемые в геометрии без доказательства и служащие конечной основой всех доказательств, называются *постулатами* или *аксиомами*; все же остальные, доказываемые с помощью первых, называются *теоремами*. У читателя могут естественно возникнуть вопросы: откуда же вообще берутся аксиомы, и почему, не будучи доказанными, они могут послужить прочным фундаментом для геометрии? Вопросы эти очень большие, и попытка ответить на них вывела бы нас далеко за пределы настоящей главы. Ответим кратко, что одни видят в аксиомах выражения основных свойств пространства, из которых все остальные выводятся путем логической дедукции; другие считают аксиомы свободно устанавливаемыми предпосылками: устанавливая систему аксиом, мы сами создаем себе предмет исследования, заключающийся в выводе из них всевозможных следствий. К затронутым здесь вопросам нам придется вернуться в конце книги; но, как бы то ни было, в геометрии должны существовать аксиомы.

Помимо аксиом и теорем, в геометрии имеются еще

определения, благодаря которым более сложные понятия сводятся к более простым, известным уже из предыдущей части курса. Перебирая определения, мы придем к восходящему ряду, подобному вышеуказанному, и выводы будут того же рода: все понятия, встречающиеся в геометрии, делятся на 2 группы; одни, в небольшом количестве, принимаются без определений (ибо нет уже более простых для их определения) и называются *первоначальными* или *основными*; другие же определяются в конечном счете с помощью первых и называются *производными*.

Указанное двоякое деление предложений и понятий геометрии необходимо проводить самым строгим образом, и основная заповедь научной строгости гласит: *всякое предложение геометрии должно быть или открыто помещено в число аксиом, или строго доказано с помощью аксиом; всякое понятие в геометрии должно быть или открыто помещено в число основных, или точно определено с помощью основных.*

Такие выводы вытекают из сущности геометрии, как умозрительной науки, и Евклиду они были совершенно ясны. В „Началах“ мы, правда, не найдем рассуждений, подобных вышеизложенным; но как общий план книги, так и выработанные доказательства отдельных теорем свидетельствуют о том, что идеал построения геометрии предносился мысленному взору автора. Первая книга открывается перечнем недоказуемых предпосылок геометрии, к которым присоединяются определения наиболее важных понятий; таким образом в начале своего труда Евклид пожелал собрать все предложения, служащие основой последующего.

Определения составляют более слабое место рассматриваемого курса геометрии; причиной служит то обстоятельство, что нет ясного перечня основных понятий. Но в области доказываемых и недоказываемых предложений различие проведено чрезвычайно отчетливо.

Познакомимся с основными предпосылками геометрии в изложении Евклида; прежде всего имеется 5 чисто-геометрических постулатов:

1) каждые две точки можно соединить прямою;

2) ограниченную прямую можно непрерывно продолжить;

3) из любого центра можно описать окружность любым радиусом;

4) все прямые углы равны между собой;

5) если прямая, пересекая 2 другие прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше 2-х прямых углов, то эти прямые, будучи продолжены неограниченно, пересекаются с той стороны от 3-й прямой, с которой лежат упомянутые выше углы.

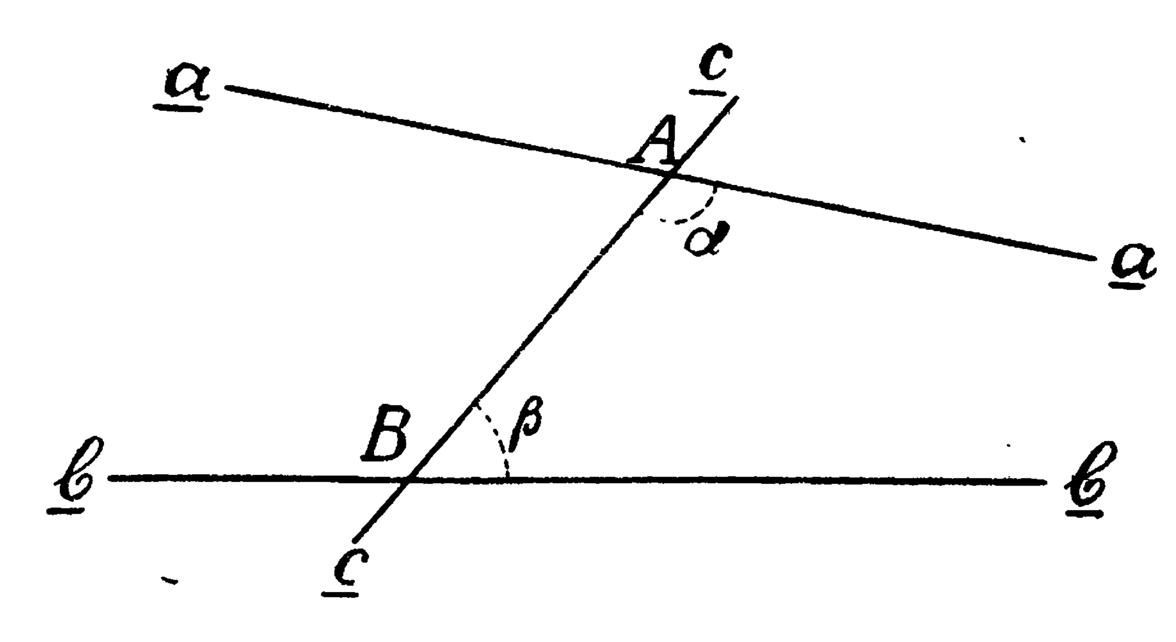
Первые три постулата лежат в основе всех построений элементарной геометрии; *практически* эти основные построения выполняются с помощью линейки и циркуля. Четвертый постулат в настоящее время обычно помещается в число теорем, при чем, конечно, иные предложения берутся в качестве постулатов. Пятый постулат является предложением, облеченным в более сложную форму, но зато и более интересным; он лежит в основе учения о параллельных прямых.

Поясним прежде всего содержание V-го постулата при помощи черт. 2: две данные прямые a и b пересекаются 3-й прямою c соответственно в точках A и B; углы α и β представляют собою одну из 2-х пар внутренних односторонних углов. Так вот, если:

$$\alpha + \beta < 2\text{-х прямых углов},$$

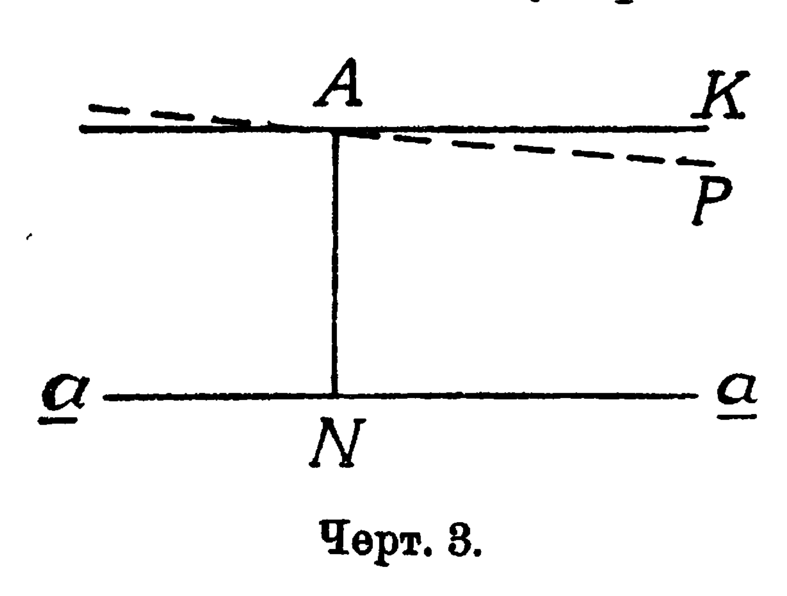
то прямые a и b пересекаются при достаточном продолжении (именно — направо от c); это утверждает V-й постулат Евклида. Далее известно, что *параллельными* называются прямые, лежащие в одной и той же плоскости и не пере-

секающиеся, сколько бы мы их ни продолжали. Основной вопрос в учении о параллельных прямых гласит так: дана прямая a и вне ее точка A (черт. 3); существуют ли прямые,



Черт. 2.

проходящие через точку A и параллельные прямой a, и сколько именно имеется таких прямых? Вопрос о существовании решается следующим построением: опустим из точки A перпендикуляр AN на прямую a и в точке A к прямой AN (в той же плоскости) восставим перпендикуляр AK; тогда прямые a и AK будут параллельными. Действительно, если допустить, что они пересекутся в некоторой точке, то из этой точки окажутся опущенными на прямую AN два различных перпендикуляра, что̀ невозможно, как это доказывается в предыдущей части курса. Таким образом одна параллельная AK построена; но нельзя ли провести через A еще какую-нибудь прямую, параллельную данной? Для нашего пространственного представления довольно ясно, что других параллельных нет: всякая прямая AP, отличная от AK, пересечет a



Черт. 3.

с той или с другой стороны от точки N. Но ведь это — одно из геометрических предложений, а потому, согласно указанному выше правилу, оно должно быть либо аксиомой, либо теоремой. Если мы поместим его в число аксиом, то будем правы; но если мы уже приняли V-й постулат Евклида, то нетрудно доказать рассматриваемое предложение. Действительно, угол PAN будет острым, так что:

$$\angle PAN + \angle N < 2\text{-х прямых углов;}$$

а потому прямые AP и a должны пересечься. Таким образом мы доказали интересующее нас предложение, но зато приняли без доказательства постулат Евклида. Последующие геометры в течение 2000 лет спрашивали, нельзя ли доказать этот постулат при помощи остальных предпосылок геометрии; в конце концов ответ получился отрицательный*), и надо подивиться проницательности древнего геометра, усмотревшего здесь необходимость новой аксиомы. К V-му постулату нам придется возвратиться еще не раз.

Помимо указанных чисто-геометрических предпосылок, Евклид высказывает несколько аксиом более общего характера, т.-е. таких, которые имеют место не только в геометрии; таковы, напр., следующие:

1) равные одному и тому же равны между собой;

2) целое больше своей части, и др.

Нетрудно подметить, что в этих аксиомах автор хотел выразить общие свойства *величины*, которые затем он считает возможным применять к различным геометрическим образам (напр., к многоугольникам, говоря о их площадях, и т. п.).

Теперь уже высказано решительно все, что принимается в „Началах" без доказательства; а все остальные

*) См. главу V.

предложения геометрии должны быть строго доказаны. Мы не должны смущаться, если среди последних попадется такое, которое нам совершенно ясно и очевидно без всякого доказательства; точно так же не следует увлекаться популярными насмешками над стремлением математиков к строгости, которые добиваются якобы лишь того, что некоторые утверждения после доказательства становятся менее ясными, чем были первоначально. Дело заключается в том, что когда мы стоим перед каким-нибудь геометрическим утверждением, то перед нами открываются два и только два пути: или принять его в качестве аксиомы, или, если этого не сделано, доказать его с помощью аксиом, как бы оно ни было просто само по себе. В таком случае доказательство послужит не для устранения каких-то несуществующих сомнений, а для выяснения логической связи отдельных предложений нашей науки. Конечно, изложенная точка зрения требует известного развития у читателя или слушателя; но мы ведь говорим сейчас о *научной* геометрии.

После этих разъяснений можно обратиться к первым теоремам Евклида и ознакомиться с его методом. В начале 1-й книги автор желает доказать, что от бо́льшего отрезка можно отнять меньший. Предложение это весьма просто и ясно; к тому же требуемое построение чрезвычайно легко осуществить на практике. Тем не менее оно не находится в числе аксиом (см. выше), а потому в системе научной геометрии должно быть доказано; практическая осуществимость здесь ничего не дает, тем более, что она неизбежно имеет лишь приближенный характер. Конечно, взяв рассматриваемое предложение без доказательства в качестве аксиомы, Евклид тоже был бы совершенно прав; но без особой нужды нет основания умножать число недоказуемых предпосылок. Итак, упомянутое утверждение доказывается; но предварительно доказываются еще

две вспомогательных теоремы, так что „Начала“ открываются следующими предложениями:

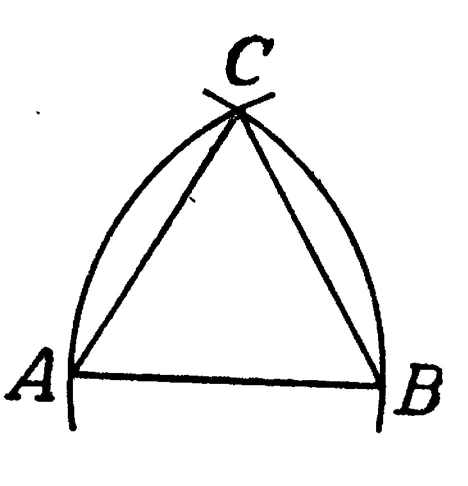
1) на данном отрезке построить равносторонний треугольник;

2) из данной точки провести отрезок, равный данному;

3) от бо́льшего отрезка отнять меньший

(предложения имеют форму задач, но это несущественно).

Рассмотрим доказательство первого из них. Пусть дан отрезок AB (черт. 4); из точки A, как из центра, описываем окружность радиусом AB (возможно на основании III-го постулата); из точки B, как из центра, описываем окружность радиусом BA (то же основание, что́ и выше); пусть эти окружности пересекаются в точке C; соединяем A с C и B с C (на основании I-го постулата); треугольник ABC и будет искомым. Действительно:



Черт. 4.

$AC = AB$ и $BC = BA$ (по свойству окружности),

следовательно:

$AC = BC$ (1-я общая аксиома; AB и BA обозначают один и тот же отрезок).

Таким образом получается:

$AC = BC = AB$, что́ и требовалось доказать.

Мы видим, что доказательство весьма тщательно разработано, и автор старается каждый шаг в своем рассуждении подкрепить соответствующей ссылкой. Тем не менее в последнее время было указано, что в этом отношении имеется один пробел: существование точки C пересечения логически не обосновано. Никто не сомне-

вается, что она действительно существует; но так как подобного утверждения нет среди аксиом, то его надо было доказать на основании аксиом — по основному правилу, приведенному выше. Евклид этого не сделал, да и не мог сделать с помощью тех аксиом, которыми он располагал; для полного разбора всех вопросов, связанных с пересечением 2-х окружностей или окружности с прямою, необходима особая *аксиома непрерывности*, которая является достоянием лишь XIX века. Отсюда видно, что нельзя особенно сильно нападать на Евклида за такой просмотр, который был восполнен только 2 тысячелетия спустя.

Подобные замечания придется сделать и относительно дальнейших частей книги: на ряду с поразительной систематичностью изложения и с общей строгостью доказательств, встречаются пробелы в логическом обосновании некоторых утверждений (которые сами по себе совершенно правильны). Справедливость требует отметить, что эти пробелы были замечены и восполнены лишь в недавнее время.

Таким образом непреходящая заслуга Евклида состоит в том, что он отчетливо указал идеал строго-научного построения геометрии; но осуществить этот идеал во всей полноте ему не удалось. Мы опять-таки не поставим ему этого в большую вину, если обратим внимание на то, что указанный идеал не осуществлен еще и доселе: мы значительно приблизились к нему, но сейчас нельзя еще указать такой книги, в которой, по общему признанию, была бы решена эта задача.

В заключение главы, мы отметим, в интересах дальнейшего, некоторые особенности „Начал".

Во-первых, надо упомянуть о том особом положении, которое занимает там V-й постулат. Дело в том, что эта предпосылка впервые применяется при доказательстве

29-го предложения, а первые 28 теорем доказаны без ее помощи. При внимательном изучении 1-й книги получается впечатление, как будто Евклид хотел сначала изложить все, что было возможно, без помощи V-го постулата и применил его лишь в последнюю минуту, когда без него итти дальше уже было невозможно. Вот это обстоятельство, в связи с более сложным содержанием, ставило V-й постулат в особое положение, что̀ имело большое значение в историческом развитии геометрии (см. главу V).

Во-вторых, укажем одно существенное отличие современных курсов геометрии от их первоисточника. В современных курсах большое значение имеет приложение науки о числе к науке о пространстве. Измеряя геометрические величины, мы выражаем их с помощью чисел и, таким образом, получаем возможность применять алгебру к выводу различных соотношений между геометрическими величинами. Указанным путем обычно выводятся основные зависимости между сторонами треугольника; в частности, теорему Пифагора:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \text{ (см. черт. 1)}$$

понимают иногда так: квадрат числа, измеряющего сторону BC, равен сумме квадратов чисел, измеряющих две другие стороны. Такого употребления чисел в геометрии не мог сделать древний грек, ибо его понятие о числе ограничивало̀сь рациональными числами, совершенно недостаточными для измерения величин. Та же самая теорема Пифагора поможет нам весьма просто убедиться в этом; действительно, возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором:

$$AB = AC = 1 \text{ (т.-е. = единице длины);}$$

тогда:

$$(BC)^2 = 2,$$

и современный математик сейчас же скажет, что сторона BC измеряется числом, равным $\sqrt{2}$. Древний же грек не мог этого сказать просто потому, что он такого числа не знал; следовательно в его глазах существовали величины, которые никаким известным ему числом не выражались. К указанному выводу пришли очень давно; нам нетрудно будет теперь понять, что он был уже известен в школе Пифагора. Существование несоизмеримых величин поразило умы древних; передают, что тот член братства пифагорейцев, который дерзнул сообщить непосвященным об этой дисгармонии мира, подвергся жестокой каре со стороны богов. В то же время такое открытие вырыло в глазах древних ученых непроходимую пропасть между величиной и числом; а потому наука о числе была неприменима к учению о величинах. Отсюда проистекла та особенность изложения Евклида, что оно носит чисто-геометрический характер; нет того, что ныне называется приложением алгебры к геометрии. Теорема Пифагора, напр., читалась непременно так: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик с суммой квадратов, построенных на катетах. Более того, так как геометрическая величина была более широким понятием, чем число, то начала алгебры излагались в геометрической форме; так, известное тожество:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

высказывалось так: квадрат, построенный на сумме 2-х отрезков, равновелик с суммой квадратов, построенных на каждом отрезке, плюс удвоенный прямоугольник, построенный на данных отрезках.

III. Применение методов алгебры и анализа.

После того, как угасла эллинская культура, научное знание нашло себе служителей среди арабов, а европейские народы находились еще в глубоком варварстве. Тогда как в геометрии арабы не пошли дальше греков, в алгебре они достигли значительных успехов: геометрия — слово греческое, а алгебра — арабское. В эпоху Возрождения (XV век) математические знания от арабов проникли в среднюю Европу, и здесь быстрое развитие получила опять-таки алгебра: уже в XVI столетии были решены уравнения 3-й и 4-й степени. В связи с этим потребовалось обобщение понятия о числе; с одними рациональными числами далеко не всегда можно решить даже квадратное уравнение. Для нахождения его корней приходится извлекать корень квадратный из неполного квадрата; иногда под корнем квадратным стоят отрицательные числа. Таким образом алгебраисты пришли к понятию об иррациональных и комплексных числах; полная и строгая теория этих чисел была дана только в XIX столетии, но значительно раньше математики освоились с указанным обобщением и научились действиям над новыми числами.

Здесь нас интересуют только иррациональные числа; благодаря их присоединению исчезла та пропасть между величиной и числом, которая поразила древних греков и так сильно сказалась на их методе в области геометрии. Теперь уже наука о числе обладала достаточными средствами для того, чтобы ее можно было с успехом применить для изучения величин вообще и в частности — величин геометрических; приложение это не замедлило прийти. Выдающийся французский математик того времени Виэт (1540—1603), впервые применивший в ал-

гебре буквенное обозначение, применил также алгебру к решению некоторых геометрических вопросов*).

Таким образом был сделан крупный шаг вперед в смысле открытия новых путей в геометрии; но еще не были созданы предпосылки для всепроникающего применения алгебраического анализа в геометрии, устраняющего в значительной степени самую работу пространственного воображения. Дело заключается в следующем. В геометрии, на ряду с вопросами, касающимися величин и соотношений между ними, имеются вопросы, относящиеся исключительно к положению геометрических образов и совершенно не связанные с понятием величины; таковы, напр., вопросы: лежат ли 3 данные точки на одной прямой, или нет? пересекаются ли данные прямые? и т. п. Следовательно, если мы желаем применять алгебру к изучению геометрии систематически, т.-е. создать из этого применения особый метод, то необходимо научиться выражать с помощью чисел не только величины геометрических образов (что́ было уже известно), но и их положение друг по отношению к другу. Вот эта последняя задача ждала еще своего решения, и решил ее знаменитый французский философ и математик Декарт в одной работе, опубликованной в 1637 г.; надо прибавить, что славу Декарта разделяет другой не менее видный его современник Ферма. Таким образом создалась *аналитическая геометрия*, которая является последовательным применением алгебраического анализа к изучению геометрии.

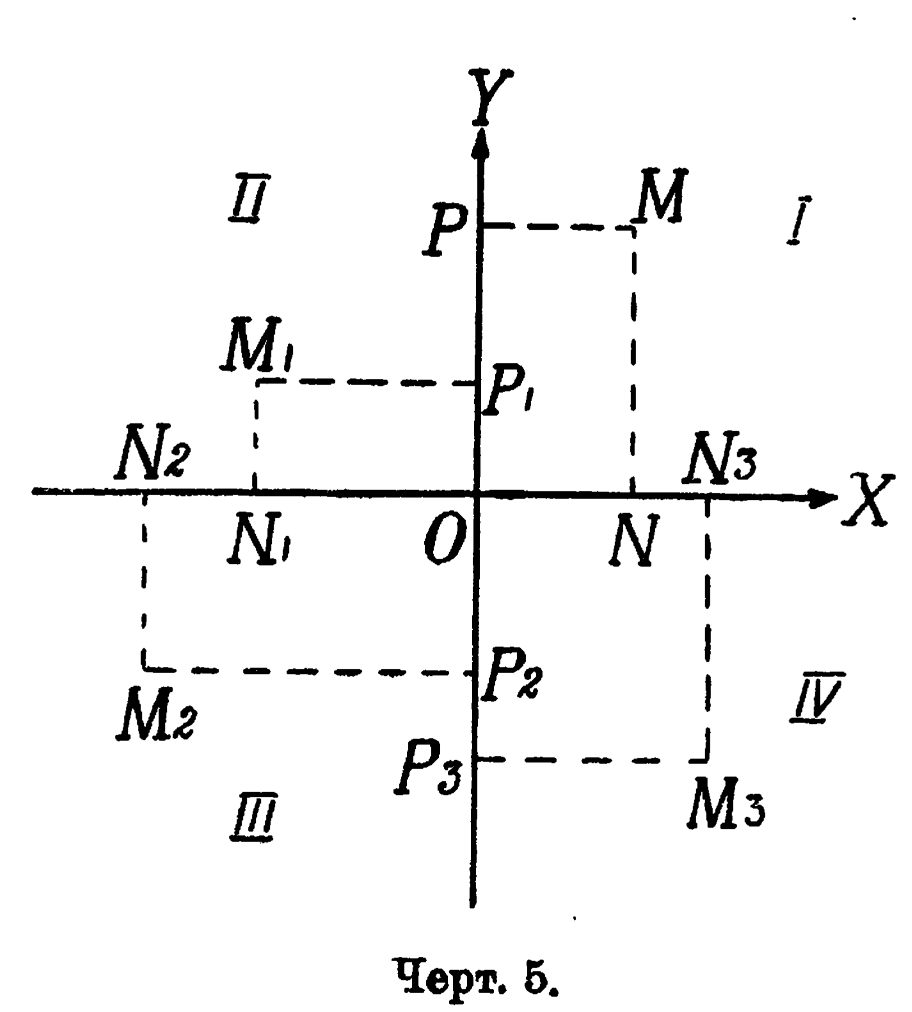
Открытие Декарта заключается в так называемом *методе координат*. Сущность его сделалась в настоящее время общим достоянием всех образованных людей: по

---

*) Быть-может, читатель имел дело в средней школе с „приложением алгебры к геометрии“; это и есть то самое, о чем мы сейчас упомянули.

этому методу строятся различные графические изображения, будет ли то суточный ход температуры, или график изменения народонаселения с течением времени, или еще что-либо подобное. Однако нам необходимо войти в некоторые математические подробности, ограничиваясь *геометрией на плоскости.*

Возьмем на данной плоскости две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY (черт. 5; прямую OX обыкновенно изображают в горизонтальном положении, а OY — в вертикальном); сейчас же условимся эти прямые называть *осями координат*, а точку O их пересечения — *началом координат.* Осям координат приписывают раз навсегда определенные направления, при чем обыкновенно направление оси OX идет слева направо, а оси OY — снизу вверх (см. стрелки на черт. 5). Положим теперь, что в нашей плоскости дана произвольная точка M, и требуется определить ее положение в этой плоскости. С указанной целью делаем следующее построение: из точки M опускаем перпендикуляры MN и MP на оси координат и измеряем отрезки ON и OP с помощью принятой единицы длины. Далее вводим следующие весьма существенные условия и обозначения: буквой x назовем длину отрезка ON, взятую со знаком плюс или минус, смотря по тому, лежит ли точка N справа или слева от O; точно так же



Черт. 5.

буквой y назовем длину отрезка OP, взятую со знаком плюс или минус, смотря по тому, лежит ли точка P сверху или снизу от O. Таким образом в соответствие с каждой данной точкой M приводится пара вещественных чисел (x, y), взятых в определенном порядке. Напр., на черт. 5 длины различных отрезков будут таковы:

$$ON = 1{,}5;\ OP = 2{,}5;\ ON_1 = 2;\ OP_1 = 1;\ ON_2 = 3;\ OP_2 = 1{,}5;$$
$$ON_3 = 2{,}1;\ OP_3 = 2{,}3;$$

следовательно числа x и y для данных точек равны:

для точки M .... $x = +1{,}5$; $y = +2{,}5$;
" " M_1 .... $x = -2$; $y = +1$;
" " M_2 .... $x = -3$; $y = -1{,}5$;
" " M_3 .... $x = +2{,}1$; $y = -2{,}3$.

(знак $+$ впереди числа обыкновенно не пишется).

Обратно, если нам даны два вещественных числа x и y, то можно следующим образом построить вполне определенную, соответствующую им точку на плоскости. Возьмем отрезок ON, длина которого измеряется абсолютным значением числа x, и отложим его по OX от точки O — вправо, если $x > 0$, и влево, если $x < 0$; точка N примет вполне определенное положение. Точно так же возьмем отрезок OP, длина которого измеряется абсолютным значением числа y, и отложим его по OY от точки O — вверх, если $y > 0$, и вниз, если $y < 0$; тогда точка P примет также вполне определенное положение. Далее, восставим в точке N перпендикуляр к оси OX, а в точке P — к оси OY; пересечение этих перпендикуляров даст искомую точку M. Напр., если:

$$x = -2,\ y = +1,$$

то вышеуказанное построение приведет нас сначала к точкам N_1 и P_1, а затем — к точке M_1, которая и будет искомой (черт. 5).

Таким образом между точками плоскости и парами вещественных чисел (x, y) устанавливается полное соответствие: каждой точке отвечает определенная пара и каждой паре — определенная точка. Следовательно, если дана система координат YOX, то положение точки на плоскости вполне определяется с помощью этих двух чисел, которые и называются *прямоугольными* или *декартовыми координатами* точки; при этом число x называется *абсциссой*, а y — *ординатой* точки. То обстоятельство, что точка M имеет своими координатами числа x и y, записывается обыкновенно так:

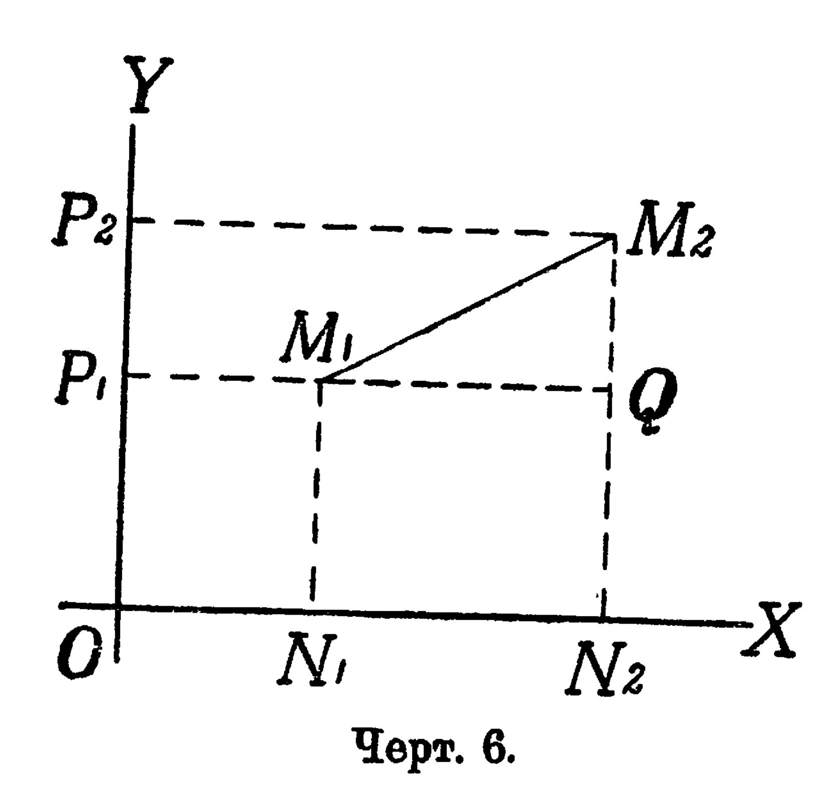
$$M\ (x,\ y).$$

Оси координат своим пересечением делят плоскость на 4 части, которые называются *координатными углами* и нумеруются так, как это указано на черт. 5. По знакам координат очень легко судить о положении точки в том или другом координатном угле; тот же самый чертеж сделает для читателя очевидной следующую табличку:

если	точка	лежит в	I	угле,	то	$x>0$ и $y>0$;
„	„	„	II	„	„	$x<0$ и $y>0$;
„	„	„	III	„	„	$x<0$ и $y<0$;
„	„	„	IV	„	„	$x>0$ и $y<0$.

Если точка лежит на самой оси OX, то ее ордината равна нулю, а абсцисса может иметь любое значение (в зависимости от положения точки); если точка лежит на OY, то абсцисса $=0$, а ордината может иметь любое значение. Наконец, для начала координат обе координаты равны нулю.

Познакомившись с сущностью метода координат, покажем его применение на одной задаче о точках. В аналитической геометрии слова: „дана точка“ надо понимать в том смысле, что даны ее координаты; точно так же слова: „найти точку“ означают требование определить ее координаты.



Черт. 6.

Итак, пусть даны нам 2 точки:

$$M_1\ (x_1,\ y_1)\ \text{и}\ M_2\ (x_2,\ y_2),$$

а требуется найти расстояние между ними $M_1 M_2$.

Опустим из данных точек перпендикуляры на оси координат (черт. 6) и продолжим $M_1 P_1$ до пересечения с $M_2 N_2$ в точке Q; по теореме Пифагора имеем:

$$(M_1 M_2)^2 = (M_1 Q)^2 + (QM_2)^2.$$

Полученные на чертеже четырехугольники все суть прямоугольники, а потому:

$$M_1 Q = N_1 N_2 \quad \text{и} \quad QM_2 = P_1 P_2,$$

так что:

$$(M_1 M_2)^2 = (N_1 N_2)^2 + (P_1 P_2)^2.$$

Вычисляем далее:

$$N_1 N_2 = ON_2 - ON_1, \quad P_1 P_2 = OP_2 - OP_1$$
$$N_1 N_2 = x_2 - x_1, \quad P_1 P_2 = y_2 - y_1;$$

подставляя, имеем:

$$(M_1 M_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Наконец, извлекая корень квадратный, получаем искомую формулу:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

где перед корнем подразумевается знак плюс.

Если данные точки не лежат обе в I-м координатном угле, а расположены как-нибудь иначе, то рассуждение придется видоизменять, но окончательный результат будет тем же самым.

Сделаем численный пример: расстояние между точками:

$$M_1(-3, 2) \text{ и } M_2(1, -4)$$

будет:

$$M_1 M_2 = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [-4-2]^2} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2} =$$
$$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Итак, мы знаем теперь, каким образом определяются аналитически (т.-е. с помощью чисел) отдельные точки; на очереди стоит задача об аналитическом определении линий.

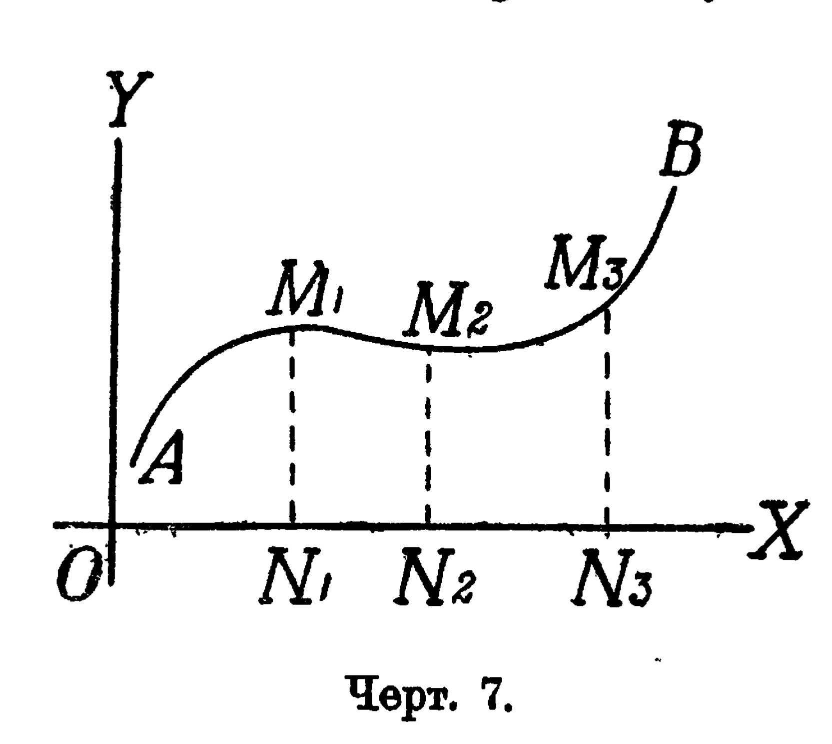
Каждая линия есть определенная совокупность точек; говорят, что она есть „геометрическое место точек“, т.-е. совокупность точек, характеризуемых каким-либо геометрическим свойством; всякая точка, обладающая этим свойством, принадлежит рассматриваемой линии, а необладающая им — лежит вне линии. Так, напр., окружность есть геометрическое место точек плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии (равном ее радиусу) от данной точки (ее центра); если центр окружности находится в точке C, а ее радиус $= r$, то точка M тогда и только тогда лежит на окружности, когда:

$$CM = r.$$

Мы сейчас увидим, что линии определяются при помощи уравнений с 2 неизвестными; для того, чтобы найти уравнение данной линии, надо перевести на язык алгебры то геометрическое свойство, которое определяет данную линию, как геометрическое место точек.

Пусть дана произвольная линия AB (черт. 7); построим какую-нибудь координатную систему YOX (как говорят,— отнесем данную линию к этой координатной системе). Зададим для абсциссы какое-либо значение

$$x = ON_1;$$



Черт. 7.

пока идет речь о точках плоскости вообще, то, при данном x, ордината может иметь любое значение; не то будет, если мы ограничимся точками данной линии. Действительно, все точки плоскости, у которых абсциссы $= ON_1$, лежат на перпендикуляре, восставленном в точке N_1 к оси OX; следовательно точка линии AB, обладающая этим же свойством, должна лежать на пересечении перпендикуляра с данной линией; это будет вполне определенная точка M_1 *). Ее ордината N_1M_1 теперь тоже вполне определена, так что здесь по данному x вполне определилось соответствующее значение y. Дадим абсциссе ряд других значений

$$x = ON_2, \ ON_3, \ldots\ldots;$$

*) Перпендикуляр может пересечь данную линию в нескольких точках; тогда получим несколько определенных точек, и рассуждение придется только соответственным образом видоизменить.

будем точно так же находить соответствующие точки линии AB:

$$M_2, M_3, \ldots\ldots,$$

и тем самым вполне определятся их ординаты

$$y = N_2M_2,\ N_3M_3, \ldots\ldots$$

Таким образом, для данной линии, ордината y какой-либо точки вполне определяется заданием ее абсциссы x; следовательно между этими величинами имеется известная зависимость, которая позволяет по данному x вычислить y. Но зависимость между x и y выражается некоторым уравнением, связывающим эти числа; и всякое уравнение, по переносе всех его членов в левую часть, можно представить в виде равенства

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ есть символ выражения, стоящего в левой части и содержащего x и y.

Если бы мы исходили не из линии AB, а из какой-нибудь другой, то понятно, что характер зависимости был бы иной и мы пришли бы к иному уравнению. Таким образом каждой линии соответствует свое уравнение, связывающее координаты любой ее точки. Обратно, если дано уравнение

$$f(x, y) = 0,$$

то, давая неизвестной x ряд значений:

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots\ldots$$

и вычисляя из уравнения соответствующие значения y:

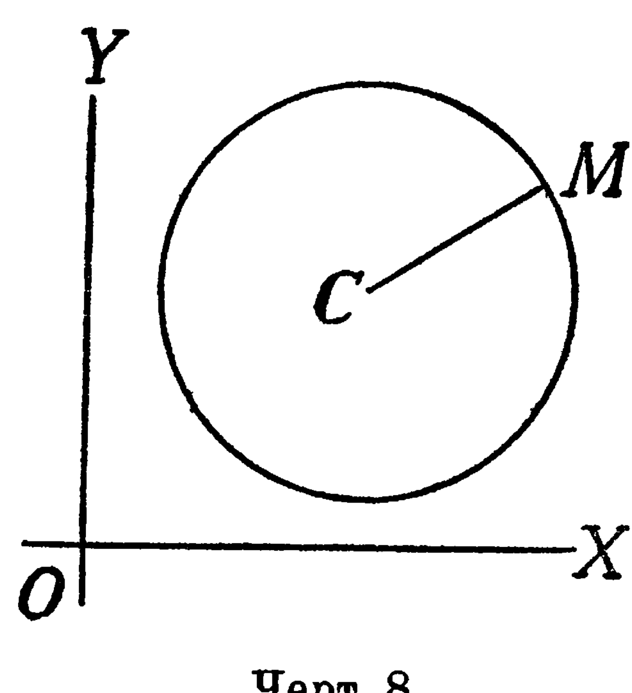
$$y = y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots\ldots\ldots,$$

получаем ряд точек:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots\ldots,$$

которые образуют линию, определяемую данным уравнением *).

Итак, мы убеждаемся, что линии в аналитической геометрии определяются уравнениями с двумя переменными; такое уравнение дает связь между координатами любой точки нашей линии, при чем эта зависимость имеет место именно для данной линии, а для всякой другой и зависимость будет другая. Для того, чтобы найти уравнение такой-то заданной линии, надо взять ее определение, т.-е. то свойство, благодаря которому точки этой линии выделяются из всей совокупности точек плоскости, а затем перевести это геометрическое определение на язык алгебры. Сейчас, на ряде задач, мы поясним указанные основные положения.



Черт. 8.

Задача 1. Найти уравнение окружности, центром которой служит точка $C(a, b)$, а радиус $= r$ (см. черт. 8).

Возьмем на окружности какую-нибудь точку $M(x, y)$;

---

*) Возможны исключительные случаи, когда уравнение не определяет линии; напр., таковым будет уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

ибо левая часть его ни при каких вещественных значениях x и y в нуль не обратится.

мы знаем уже, что эта точка лежит на окружности тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$CM = r;$$

последнее равенство служит геометрическим определением окружности, как совокупности точек. Теперь это определение надо перевести на язык алгебры. Формула (1) дает

$$CM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2};$$

подставляя, имеем:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r.$$

Остается возвысить в квадрат, и мы получаем искомое уравнение окружности

(2) . . . . $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$

Понимать его надо так, что точка с координатами (x, y) тогда и только тогда лежит на данной окружности, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (2).

Пример: уравнение окружности с центром в точке $(3, -2)$ и с радиусом $= 5$ будет

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25,$$

или

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 25,$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0;$$

точка (1, 2) не лежит на этой окружности, так как

$$1 + 4 - 6 + 8 - 12 = -5 \text{ не } = 0;$$

а точка (3, 3) лежит, ибо

$$9 + 9 - 18 + 12 - 12 = 0.$$

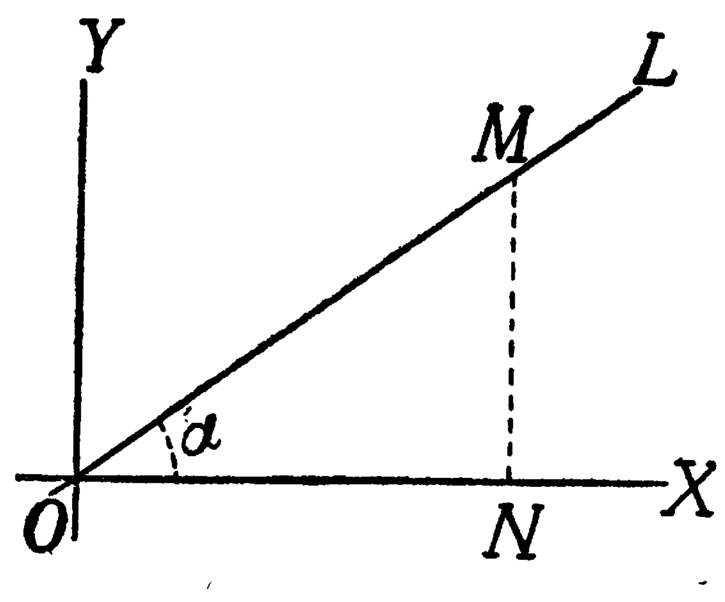
Если центр окружности лежит в начале координат, то

$$a = b = 0,$$

и получаем более простое уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача 2. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с OX угол, равный α (см. черт. 9).



Черт. 9.

Возьмем на прямой любую точку $M(x, y)$ и опустим из нее перпендикуляр MN на OX, так что

$$ON = x, \; NM = y.$$

Отрезок OM всегда будет лежать на данной прямой OL, ибо, по основному свойству прямой, она вполне определяется двумя любыми своими точками; следовательно угол $MON = \alpha$, но только в том случае, когда точка M лежит на OL. Таким образом получился прямоугольный треугольник ONM; из тригонометрии известно, что „катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего угла"; а потому

$$y = x . \operatorname{tg} \alpha.$$

Такая зависимость между x и y имеет место тогда и только тогда, когда точка (x, y) лежит на данной прямой; следовательно это и есть искомое уравнение (если точку взять в III координатном угле на другом луче данной прямой, то обе координаты становятся отрицательными, но зависимость остается той же самой). Обозначая

$$\operatorname{tg}\alpha = k,$$

можно полученное уравнение переписать так:

$$y = k \, . \, x.$$

Пример: для равноделящей I-го координатного угла угол $\alpha = 45^\circ$, так что ее уравнение будет

$$y = x \text{ (ибо } \operatorname{tg} 45^\circ = 1),$$

или

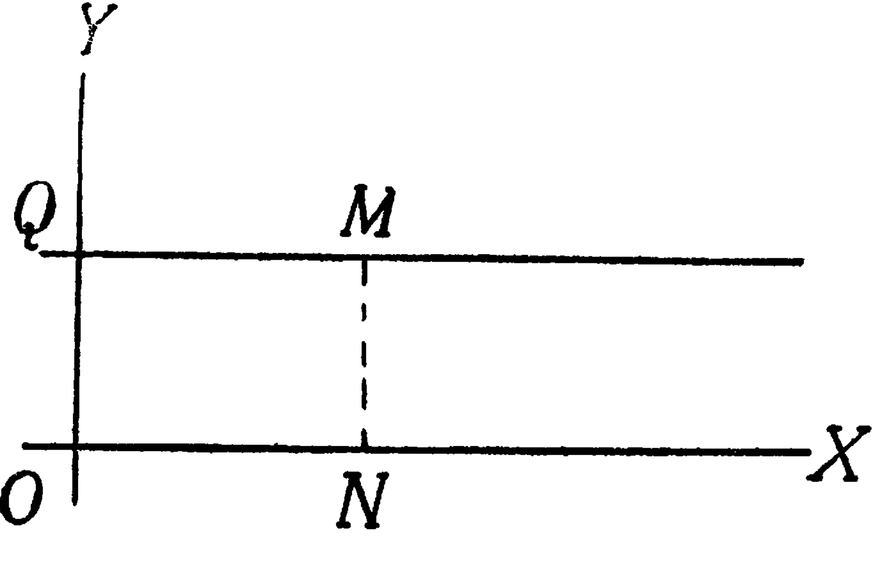
$$x - y = 0.$$

Задача 3. Найти уравнения прямых, параллельных координатным осям.

Пусть дана прямая, параллельная OX (черт. 10) и делающая на оси OY отрезок:

$$OQ = q;$$

это число q будет положительным или отрицательным, смотря по тому, лежит ли точка Q выше точки O или ниже.



Черт. 10.

Возьмем на прямой произвольную точку

$$M(x, y)$$

и построим ее координаты

$$ON = x, \; NM = y.$$

Из прямоугольника $ONMQ$ видно, что

$$NM = OQ, \text{ или } y = q;$$

но это будет тогда и только тогда, когда M лежит на прямой (иначе прямоугольника никакого не будет). Следова-

тельно уравнение данной прямой получается в виде

$$y=q;$$

здесь мы имеем частный случай, когда только одна переменная входит в уравнение. Последнее говорит, что для всякой точки данной прямой ордината имеет одно и то же значение $=q$; абсцисса же может получать любое значение, в зависимости от положения точки на прямой.

Точно так же выведем, что уравнение прямой, параллельной оси OY, будет

$$x=p,$$

где p есть тот отрезок, который данная прямая отсекает от оси OX, считая от начала координат.

Так, напр., уравнение

$$x=-3$$

определяет прямую, параллельную OY, причем на оси OX она делает отрезок, по длине равный 3 и отложенный влево от точки 0*).

До сих пор мы находили уравнение той или другой заданной линии; займемся теперь примерами на обратную задачу: по данному уравнению построить соответствующую ему линию. Так как полными средствами анализа мы здесь не располагаем, то нам придется строить искомую линию „по точкам", т.-е. определить достаточное число достаточно близких друг к другу ее точек и по ним начертить самую линию.

---

*) В последних двух задачах мы рассмотрели уравнение прямой в двух частных случаях; в аналитической геометрии доказывается, что прямая всегда определяется уравнением 1-й степени

$$Ax+By+C=0,$$

и обратно: такое уравнение всегда определяет прямую.

Задача 4. Построить линию, определяемую уравнением

$$x \,.\, y = 1.$$

Из этого равенства имеем

$$y = \frac{1}{x},$$

т.-е. y обратно пропорционален x. Даем абсциссе ряд значений

$$x = 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ldots\ldots$$

и получаем соответствующие (приближенные) значения ординаты

$$y = 1;\ 0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}25;\ 0{,}2;\ 0{,}16;\ldots\ldots$$

Таким образом получаются следующие точки кривой

$A(1,\ 1)$; $B(1{,}5;\ 0{,}7)$; $C(2;\ 0{,}5)$; $D(2{,}5;\ 0{,}4)$; $E(3;\ 0{,}3)$; $F(4;\ 0{,}25)$; $G(5;\ 0{,}2)$; $H(6;\ 0{,}16)$;......... (см. черт. 11).

Замечательно, что с беспредельным возрастанием x значения y беспредельно убывают, так что искомая линия беспредельно сближается с осью OX, никогда однако ее не пересекая; говорят, что ось OX служит *асимптотой* данной линии.

Пойдем теперь в другую сторону от точки A; пусть

$$x = 0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 02;\ldots\ldots$$

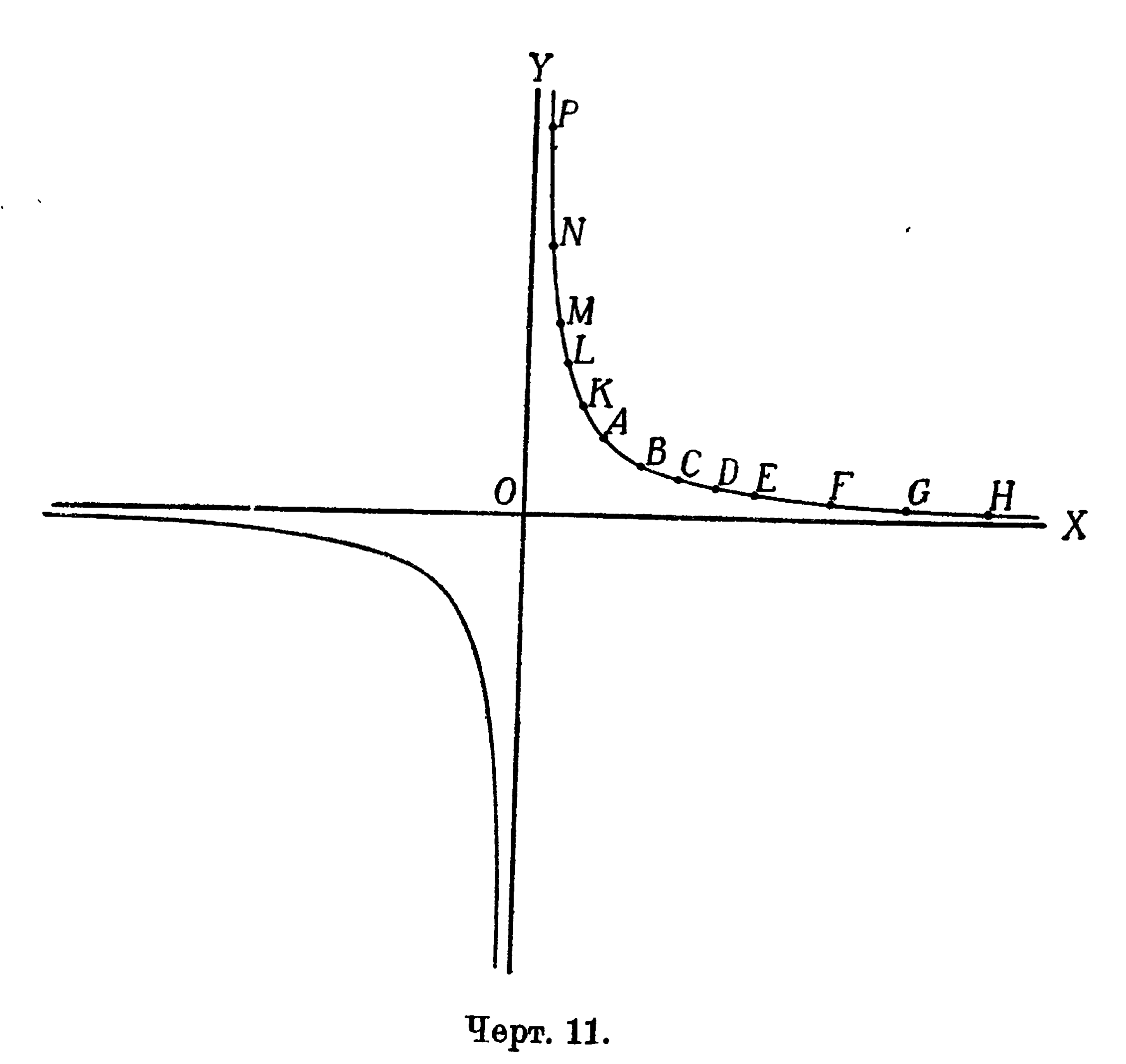
этим значениям абсциссы соответствуют следующие ординаты:

$$y = 1{,}4;\ 2;\ 2{,}5;\ 3{,}3;\ 5;\ldots\ \ldots$$

получаем точки кривой

$K(0{,}7;\ 1{,}4)$; $L(0{,}5;\ 2)$; $M(0{,}4;\ 2{,}5)$; $N(0{,}3;\ 3{,}3)$; $P(0{,}2;\ 5)$;...

Здесь снова обнаруживается интересное обстоятельство: по мере того, как x приближается к нулю, y беспредельно возрастает, и наша линия беспредельно сближается с осью OY; последняя также является ее асимптотой.



Черт. 11.

Из данного нам уравнения видно, что

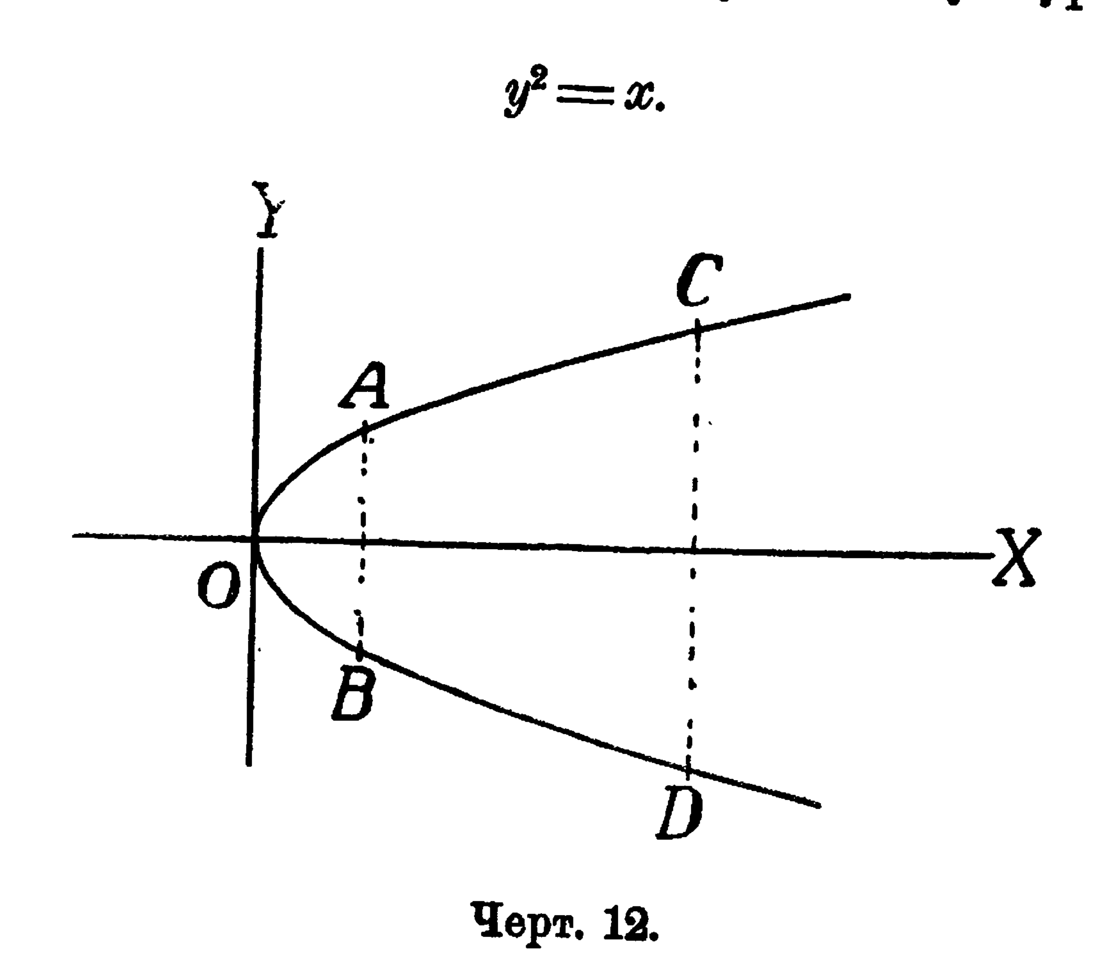
$$x.\,y > 0;$$

следовательно x и y могут быть или оба положительными (этот случай уже разобран), или оба отрицательными. В последнем случае получается ветвь кривой, тожественная с построенной раньше, но расположенная в III-м координатном угле симметрично с первой относительно точки O. Рассмотренная здесь кривая называется *равно-*

бочной гиперболой; за оси координат приняты ее асимптоты.

Задача 5. Построить линию, определяемую уравнением

$$y^2 = x.$$



Черт. 12.

Прежде всего мы видим, что x не может быть отрицательным (ибо он равен квадрату вещественного числа); далее, из уравнения имеем

$$y = \pm\sqrt{x},$$

так что данному значению абсциссы соответствуют два значения ординаты, численно равные, но обратные по знаку; им соответствуют две точки кривой, расположенные симметрично относительно оси OX. Так, напр.:

при $x=1$, имеем $y=\pm 1$; при $x=4$, имеем $y=\pm 2, \ldots\ldots$

получаем пары симметричных точек

$$A(1,\ 1) \text{ и } B(1, -1);\ C(4,\ 2) \text{ и } D(4, -2); \ldots\ldots$$

Вычисляя промежуточные значения, читатель построит

кривую, изображенную на черт. 12 и называемую *параболой* *).

На предыдущих страницах мы убедились, что, благодаря методу координат Декарта, точки плоскости определяются при помощи пар чисел, а геометрические места точек — при помощи уравнений с двумя неизвестными. Пользуясь указанными средствами, можно всякую геометрическую задачу свести на язык алгебры, а затем, переходя к ее решению, заменить ряд геометрических построений и рассуждений, требующих подчас большого напряжения внимания и воображения, почти механическими переделками алгебраических формул; получив ответ, останется снова перевести его на язык геометрии. Вот в этой механизации геометрического мышления заключается одна сторона открытия Декарта; знание алгебры мы сейчас же можем использовать в интересах геометрии. Другая, не менее важная сторона дела состоит в том, что применение алгебры дает нам в руки общий метод для систематического исследования известных геометрических образов. Действительно, алгебра преимущественно занимается решением и исследованием уравнений, изучая их в порядке возрастающей сложности; так, начинает она с уравнений 1-ой степени, затем переходит к уравнениям 2-ой степени и т. д. Теория уравнений 1-ой степени (с двумя неизвестными) дает нам возможность изучить линии 1-го порядка, т.-е. прямые; уравнения 2-ой степени знакомят нас с линиями 2-го порядка (эллипс, гипербола, парабола) и т. д.

---

*) Гипербола и парабола, вместе с эллипсом, суть кривые 2-го порядка, ибо их уравнения — второй степени; их общие свойства получаем, изучая общее уравнение 2-ой степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

выбором координатной системы это уравнение может быть упрощено.

Не имея возможности входить здесь в технические подробности, мы сделаем еще 2 простых примера для освещения метода аналитической геометрии.

Задача 6. Найти геометрическое место точек, отстоящих от точки (1, 2) вдвое дальше, чем от точки (—1, 0).

Обозначим через $M(x, y)$ какую-нибудь точку искомой линии; надо найти зависимость между x и y, которая характеризует эту линию; для этого надо перевести на язык алгебры то свойство, которое, по условию задачи, должно определять искомую линию. Вычисляем расстояние (по формуле 1) от точки M до точки $A(1, 2)$:

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2};$$

точно так же находим расстояние от M до $B(-1, 0)$:

$$MB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

По условию задачи должно быть:

$$MA = 2 . MB,$$

или

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2 . \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Это собственно и есть искомая зависимость; только ее надо преобразовать:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2,$$

$$3x^2 + 10x + 3y^2 + 4y - 1 = 0,$$

$$x^2 + \frac{10}{3}x + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} = 0,$$

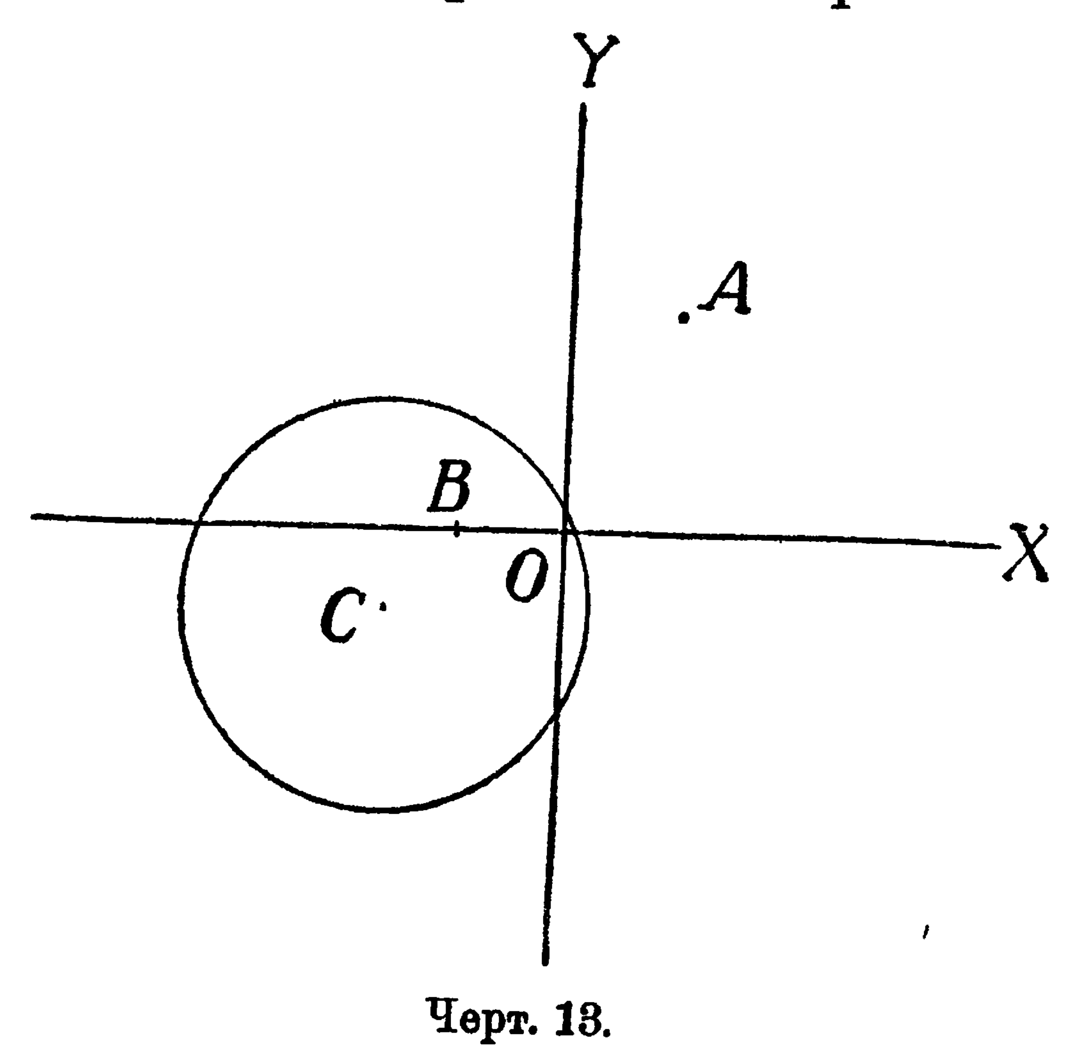
$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = 0,$$

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}.$$

Сравнивая полученный результат с уравнением (2), приходим к заключению, что искомая линия есть окружность с центром в точке $C\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ и с радиусом $=$

$$=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4.\sqrt{2}}{3}.$$

Читатель видит, что для решения задачи мы не нуждались ни в каких геометрических построениях. Теперь,



Черт. 13.

решив ее до конца, будет полезно пояснить ее чертежом (см. черт. 13).

Задача 7. Найти пересечение 2-х линий.

Так как координаты точки пересечения должны удовлетворять как уравнению одной линии, так и уравнению другой, то мы найдем их, решая совместно уравнения данных линий.

Напр., чтобы найти точки пересечения окружности

$$(x+1)^2+y^2=5$$

с прямою

$$x = 3,$$

решаем систему этих 2-х уравнений. Подставляя значение x, для определения y находим равенство

$$16 + y^2 = 5,$$

откуда

$$y^2 = -11,$$

что̀ невозможно, ибо квадрат вещественного числа не может быть отрицательным; следовательно данные линии не пересекаются.

Если к той же самой окружности присоединим другую прямую

$$y = x,$$

то для определения x получаем квадратное уравнение

$$(x + 1)^2 + x^2 = 5,$$

или

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

откуда:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{-1 \pm 3}{2};$$

итак, x равен 1 или (-2), и точки пересечения будут

$$(1, 1) \text{ и } (-2, -2).$$

В заключение главы укажем, что, несколько десятилетий спустя после открытия Декарта, Лейбниц и Ньютон создали *анализ бесконечно-малых**); новые методы,

---

*) Выяснять сущность этого открытия — здесь не место; указанному вопросу должна быть посвящена особая книга.

через посредство метода координат, оказались чрезвычайно плодотворными и в области геометрии. Следствием было то, что применение алгебры и анализа стало господствующим методом исследования в геометрии, а чисто-геометрические способы древних отошли на второй план.

IV. Проективная геометрия.

Однако интерес к *синтетической* геометрии (так называется геометрия, излагаемая с помощью чисто-геометрических методов древних,— в противоположность аналитической геометрии Декарта) окончательно не заглох; даже творцы новых аналитических методов уделяли ей внимание. С течением времени мало-по-малу стала возникать новая отрасль геометрии, которая теперь носит название „*проективной геометрии*". Последняя „составляет продолжение *геометрического анализа* древних, от которого она нисколько не отличается по цели и сущности своих исследований; но она представляет перед анализом древних неизмеримые преимущества по общности, единству и отвлеченности суждений....... "*).

Указанными особенностями своими проективная геометрия была призвана восполнить недостатки изложения древних, которые были им присущи, несмотря на глубину знания и строгость построений. Так, греческие геометры изучили некоторые замечательные кривые, с которыми и теперь знакомятся наши студенты; но каждая кривая рассматривалась отдельно и исследовалась особым способом, специально для нее созданным, так что эти

*) Эти слова принадлежат французскому геометру Шалю, в книге которого „История геометрии" (перевод издан в Москве в 1883 г.) находится много ценных сведений о происхождении новой геометрии.

методы нельзя было применить к изучению другой кривой. Древние не обладали общими методами, которыми справедливо гордится современная геометрия; их исследования проникал скорее различающий дух, направлявший внимание на частности и отдельные случаи. В книге Шаля приводится один интересный пример. У древних сплошь и рядом одна и та же теорема высказывалась во многих отдельных предложениях, в зависимости от различного расположения рассматриваемых элементов (точек, прямых и т. п.); вследствие этого, напр., в сочинении „De sectione determinata“, принадлежащем знаменитому геометру древности Аполлонию, имеется 9 главных задач, составляющих вместе с различными частными случаями в общем 83 теоремы, и Шаль утверждает, что, благодаря обобщениям новой геометрии, все эти предложения представляют только *одну* задачу и могут быть охвачены одной формулой.

Первые намеки на некоторые приемы новой геометрии находятся еще у древних; в этом отношении надо упомянуть о недошедших до нас „Поризмах“ Евклида и об одной теореме Паппа*), которая будет приведена ниже.

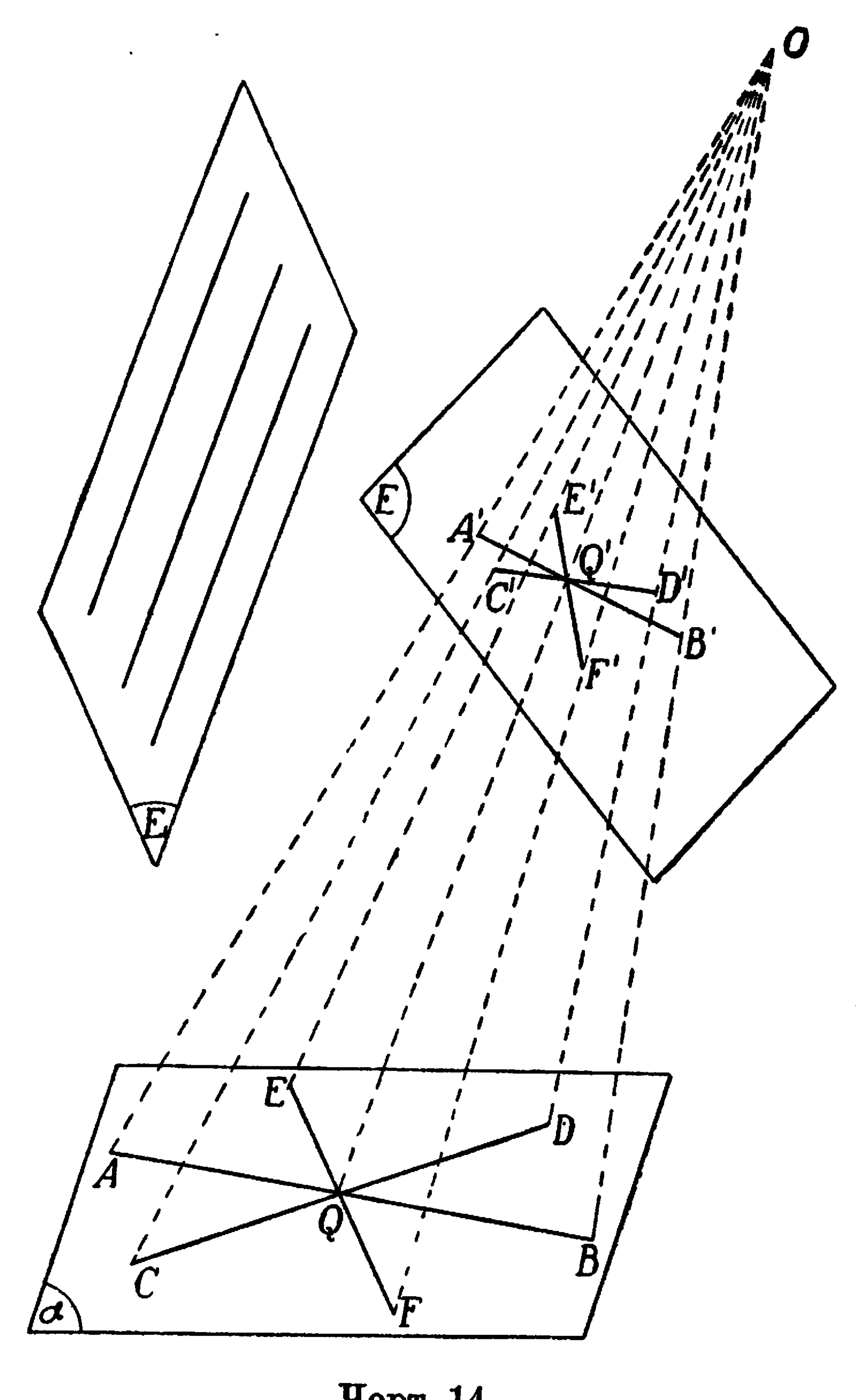
Но собственно первым, применившим в геометрии новые методы, был французский инженер и геометр Дезарг (1593—1662). Толчок к занятиям новой геометрией, как и для старой, исходил со стороны технических потребностей; именно, живопись и архитектура, особенно развившиеся в эпоху Возрождения, создали учение о перспективе. Гений Дезарга усмотрел здесь плодотворный метод, ценный и за пределами техники—в области чистой геометрии.

Способ *перспективы*, или *центрального проектирования*,

---

*) Книга Паппа „Математическое собрание“ (IV в. по Р. Х.) представляет ценный памятник греческой геометрии.

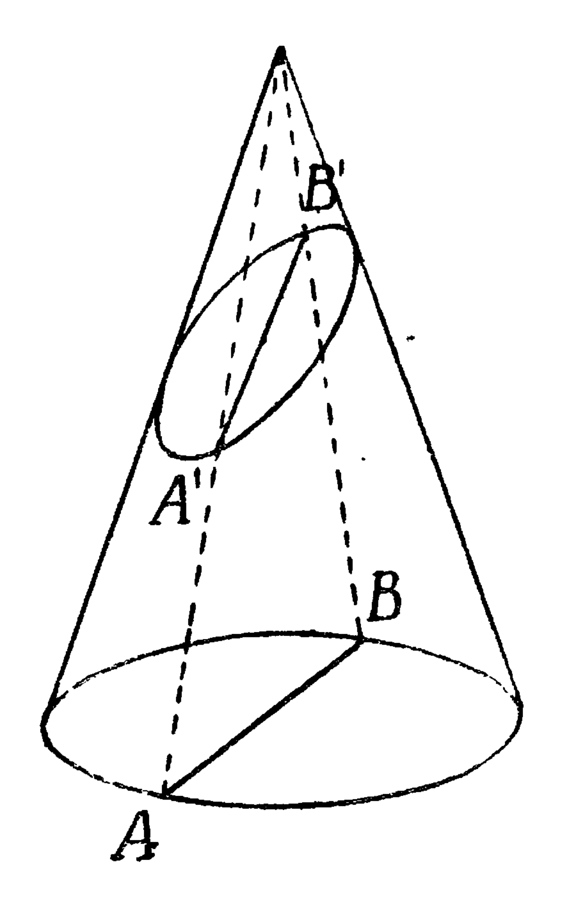
заключается в том, что каждая точка данной фигуры соединяется прямою с постоянной точкой O—центром перспективы, и полученная связка прямых пересекается



Черт. 14.

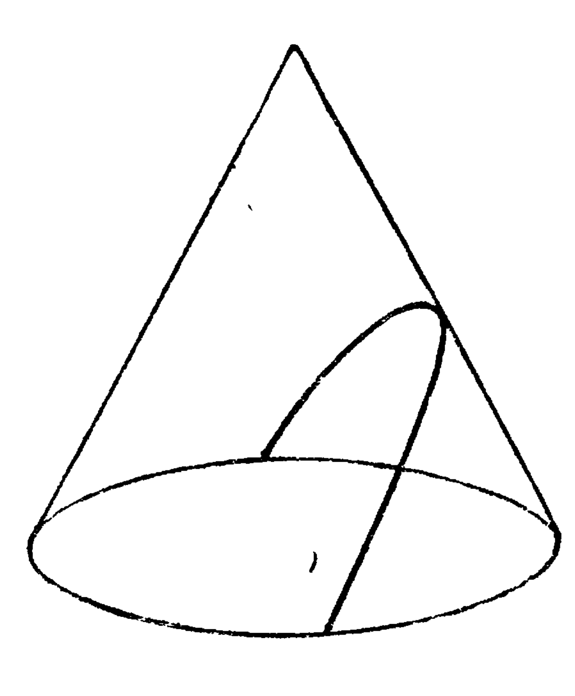
плоскостью, не проходящей через O,—плоскостью изображения. Таким образом каждой точке данной фигуры соответствует вполне определенная точка в плоскости изображения. Прямой будет соответствовать прямая, ибо лучи, проектирующие точки прямой, образуют плоскость,

определяемую точкой O и данной прямой, и эта плоскость пересекает плоскость изображения снова по прямой. Так, на черт. 14 мы видим, ка̀к точки и прямые плоскости α перспективно отображаются из центра O на плоскость ε; фигура в плоскости изображения называется перспективным изображением данной. Перспективой пользуется, напр., художник, передающий на полотно какой-либо ландшафт: лучи, идущие из глаза художника к различным точкам изображаемой местности, пересекаются тогда плоскостью картины.



Черт. 15.

В предыдущей главе мы мимоходом познакомились с кривыми 2-го порядка: гиперболой, параболой и эллипсом (последний имеет форму овала). Эти кривые изучались еще древними геометрами, которые рассматривали их, как сечения конуса (отсюда и название: „конические сечения“). Если взять обыкновенный прямой круговой конус и пересечь его плоскостью, наклонной к оси (но не параллельной образующим конуса), то в сечении получается эллипс (см. черт. 15); если пересечь конус плоскостью, параллельной одной из его образующих, то получается парабола, которая, как мы знаем, состоит из одной бесконечной ветви (см. черт. 16); наконец, плоскость, параллельная оси, дает в сечении с конусом, со-

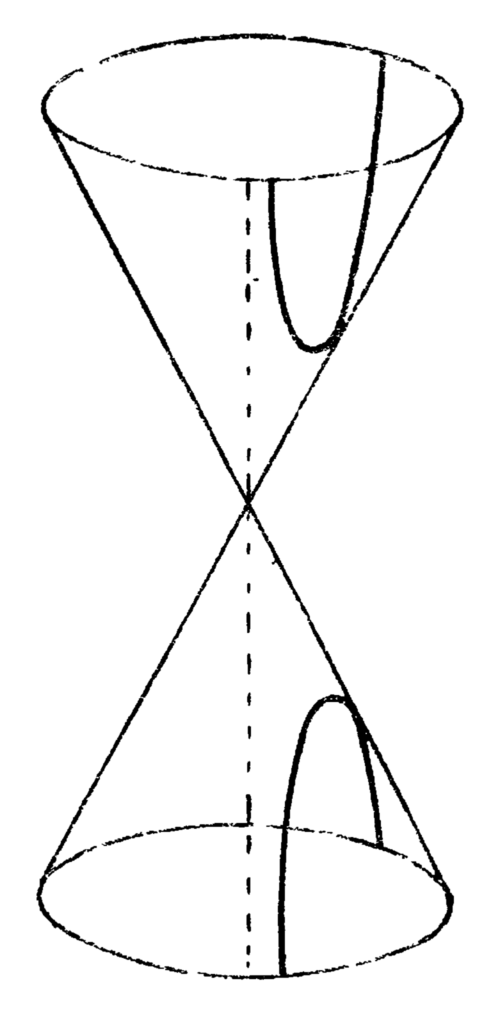


Черт. 16.

4

стоящим из двух пол, знакомую уже нам гиперболу, состоящую из двух бесконечных ветвей (см. черт. 17).

Основанием нашего конуса служит круг, и предыдущие построения говорят нам, что конические сечения можно рассматривать, как перспективные изображения круга, помещая центр перспективы в вершину конуса и располагая различным образом плоскость изображения. Вот эту мысль Дезарг и положил в основу исследования конических сечений; мысль как будто бы весьма простая и естественная, однако она никому до того времени не приходила в голову.



Черт. 17.

Таким образом Дезарг желал получить свойства конических сечений, зная свойства круга. Надо сказать, что некоторые свойства фигуры переносятся на ее перспективные изображения, однако далеко не все. Так, на черт. 15 мы видим, что основное свойство круга — равенство радиусов — эллипсу не передается; но утверждение, что всякая прямая не может пересечь круг более, чем в 2-х точках, сохраняет свою силу и при переходе к эллипсу. Ближайшее исследование показывает, что при перспективе *свойства меры* теряются, а сохраняются так наз. *графические*, или *зрительные* свойства, как-то: взаимная принадлежность точек и прямых, пересечение линий и т. п. (впрочем, эти понятия принадлежат более позднему времени). Во всяком случае, в руках Дезарга и его ближайших учеников метод перспективы оказался могучим орудием геометрического исследования. Особенно важно то, что здесь впервые был указан совершенно общий способ для

изучения конических сечений — в противоположность древним, изучавшим обособленно каждую кривую. Дезарг усмотрел общее основание для свойств конических сечений в том, что каждое из них есть центральная проекция некоторого круга.

Далее необходимо упомянуть о другом важном нововведении Дезарга; именно, он начал рассматривать параллельные прямые, как тоже сходящиеся в одной точке, но только точка эта бесконечно удалена. По всей вероятности, побудило его к этому то обстоятельство, что при перспективе пучок сходящихся прямых может преобразовываться в пучок параллельных прямых, и обратно. Так, если на черт. 14 за плоскость изображения взять плоскость ε_1, параллельную прямой OQ, то плоскости, проектирующие прямые AB, CD, EF,.... из точки O, пересекутся с нею по параллельным прямым; след. пучок сходящихся прямых с центром в Q отобразился на плоскости ε_1 в пучок параллельных прямых. Желание избежать оговорок в таких исключительных случаях, вероятно, побудило Дезарга ввести понятие о бесконечно-удаленных элементах плоскости. Понятие это чрезвычайно важно благодаря тем обобщениям, которые оно вносит в формулировку геометрических теорем, и ниже нам придется поговорить о нем подробнее.

Наконец, нельзя умолчать об одной теореме, носящей имя Дезарга и оказавшейся основной при позднейших построениях проективной геометрии; теорема эта гласит так: „если прямые, соединяющие попарно соответственные вершины 2-х треугольников, проходят через одну точку, то соответственные стороны их пересекаются попарно в точках, лежащих на одной прямой, и обратно“. Впоследствии мы эту теорему докажем.

Ближайшим последователем Дезарга был знаменитый Паскаль (1623—1662), написавший 16-ти лет от роду за-

мечательную работу о конических сечениях. В ней находится его „hexagramme mystique", т.-е. предложение, утверждающее, что противоположные стороны шестиугольника, вписанного в коническое сечение, всегда пересекаются по точкам одной прямой. Паскаль доказывал соответствующее предложение для круга, а потом переносил его на любое коническое сечение по методу перспективы. Здесь мы действительно имеем предложение вполне графического свойства: речь идет о том, что некоторые точки лежат на кривой, что некоторые прямые пересекаются в точках, лежащих также на прямой, и т. д. Теорема о „мистическом шестиугольнике" настолько важна, что ее можно положить в основу теории конических сечений*).

В духе Дезарга и Паскаля работал Де-Лагир (1640—1718), давший первый довольно общий способ преобразования фигур, не выходя из плоскости; именно, он получал конические сечения из круга при помощи преобразований на плоскости (а не в пространстве 3-х измерений). Способ Де-Лагира был снова открыт Ле-Пуавром (1704). Шаль справедливо подчеркивает всю важность подобных способов, составляющих один из главных приемов новой геометрии. Действительно, идея о преобразовании одной фигуры в другую основана на *одно-однозначном соответствии* между их точками: каждой точке одной фигуры соответствует одна и только одна точка другой. Понятие о таких соответствиях является одним из основных для новой геометрии.

Историческая последовательность приводит нас к великому Ньютону (1642—1727), который тоже использовал один из приемов преобразования фигур на пло-

---

*) Бóльшие подробности о Дезарге и Паскале, помимо истории Шаля, читатель может найти в книге: Цахариас, „Введение в проективную геометрию" („Научное Книгоизд.", 1922).

скости; здесь точкам соответствовали точки, прямым—прямые, а некоторый пучок сходящихся прямых переходил в пучок параллельных прямых. Указанным преобразованием Ньютон пользовался для превращения любого конического сечения в круг и таким образом упрощал некоторые задачи.

Здесь в историческом развитии новой геометрии наблюдается почти вековой перерыв, обусловленный торжеством аналитических методов в эту эпоху. Однако к концу столетия (1795) относится такое значительное событие, как появление „Начертательной геометрии“ Монжа. Собственно говоря, здесь решается задача, важная для инженерного искусства: инженер должен составить точный план того сооружения, которое предстоит построить, откуда и возникает задача изобразить, с сохранением всех соотношений, пространственную фигуру на плоскости. Но понятно, что такое преобразование пространственных фигур в плоские имеет также чисто-геометрический интерес, и действительно в школе Монжа оно явилось могучим орудием для исследования.

Почти одновременно (1803) появились работы Карно; его „Геометрия положения“, по мнению Шаля, представляет развитие и осуществление начал, которыми пользовались Дезарг и Паскаль. Надо добавить, что у Карно мы встречаем так наз. „полный четырехсторонник“ — фигуру, которая была призвана играть видную роль в дальнейших построениях нашей науки.

Самое же создание проективной геометрии, как самостоятельной дисциплины, приурочивается к появлению книги Понселе „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822 г.). Любопытна одна подробность: Понселе, в качестве офицера инженерной части, принимал участие в походе Наполеона в Россию; будучи ранен, попал в плен и был отослан в Саратов; там он использовал

вынужденный досуг для возобновления своих занятий геометрией, в результате которых и сложилась названная выше работа. Здесь преобразование фигур посредством перспективы применяется в самом общем и систематическом виде; исследуются те свойства геометрических образов, которые сохраняются неизменными при действиях, связанных с перспективой (указанные действия суть *проектирование* и *сечение*, о которых еще придется поговорить подробнее). С помощью таких приемов конические сечения изучались на круге, свойства 4-угольника вообще — на параллелограмме. Трудами Понселе и Жергонна было установлено *начало* или *закон взаимности*, представляющий одно из самых изящных и удивительных предложений геометрии; оно позволяет во всякой теореме проективной геометрии поменять местами термины „точка" и „плоскость" (или — „точка" и „прямая", если дело идет о геомэтрии на плоскости). Конечно, нам придется потом войти в некоторые подробности по поводу этого закона взаимности.

Выдающимся продолжателем работ Понселе был уже знакомый нам Шаль (его „История геометрии" относится к 1837 г.). В его руках построение проективной геометрии получило окончательно тот отпечаток, который свойственен так наз. „французской школе".

Приблизительно в то же самое время появились и в Германии основные работы по интересующему нас вопросу.

Через несколько лет после книги Понселе была опубликована работа Мёбиуса („Barycentrische Calcul", 1827), в которой вопросы проективной геометрии разбираются при помощи аналитических методов, так что названная работа стоит особняком от других. Заслуга Мёбиуса заключается в том, что он разработал одну из основных идей новой геометрии, а именно — понятие об

одно-однозначном соответствии. Далее этот автор изучал так наз. „коллинеации“, т.-е. такие однозначные точечные преобразования пространства, при которых прямые переходят в прямые. Названные преобразования лежат в основе проективной геометрии, и роль их там та же самая, что̀ у „движений“ в обыкновенной геометрии меры.

Наконец, нам надо упомянуть об одном выдающемся немецком геометре Штейнере, который сделал ценный вклад и в проективную геометрию („Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“, 1832). Здесь рассматриваются проективные соотношения, и с их помощью порождаются конические сечения; с этими предложениями мы познакомимся ниже.

Хотя, таким образом, немецкие ученые приняли заметное участие в создании проективной геометрии, однако этот первый период ее развития будет удобно связать с именем „французской школы“, наложившей на него свой отпечаток. Особенности „немецкой школы“ проявились значительно позднее и будут своевременно нами разобраны. Теперь же мы считаем необходимым ввести читателя в круг идей проективной геометрии — в том виде, как они сложились в указанный период ее образования.

Ограничиваясь проективной геометрией на плоскости, *основными элементами* ее называют *точки* и *прямые* (первые обыкновенно обозначаются большими, а последние — малыми буквами французского алфавита); в проективной геометрии мы имеем дело со всей неограниченной прямой — в противоположность тому, что в элементарной геометрии чаще всего речь идет об отрезке. Если точка A лежит на прямой a (или прямая a проходит через точку A),

то это обстоятельство мы будем иногда выражать словами: прямая a и точка A *совмещены* друг с другом.

Каждый из основных элементов можно рассматривать двояко: или действительно как элемент, т.-е. как нечто единое и неделимое, или как *носителя* бесконечного множества элементов другого рода. Так, прямая может входить в наши рассуждения целиком, как простейший образ геометрии, не подлежащий в данном случае дальнейшему разложению; или же под прямой можно понимать ряд точек, ее образующий. Точно так же точка может являться простейшим элементом, или ее можно рассматривать, как центр пучка прямых, т.-е. такой совокупности прямых, которую образуют прямые, лежащие в данной плоскости и проходящие через данную точку (напр., на черт. 14 мы имеем пучок прямых в плоскости α с центром в точке Q). Таким образом мы приходим к понятию о двух *основных образах* проективной геометрии на плоскости: *прямолинейный ряд точек* и *пучок прямых.*

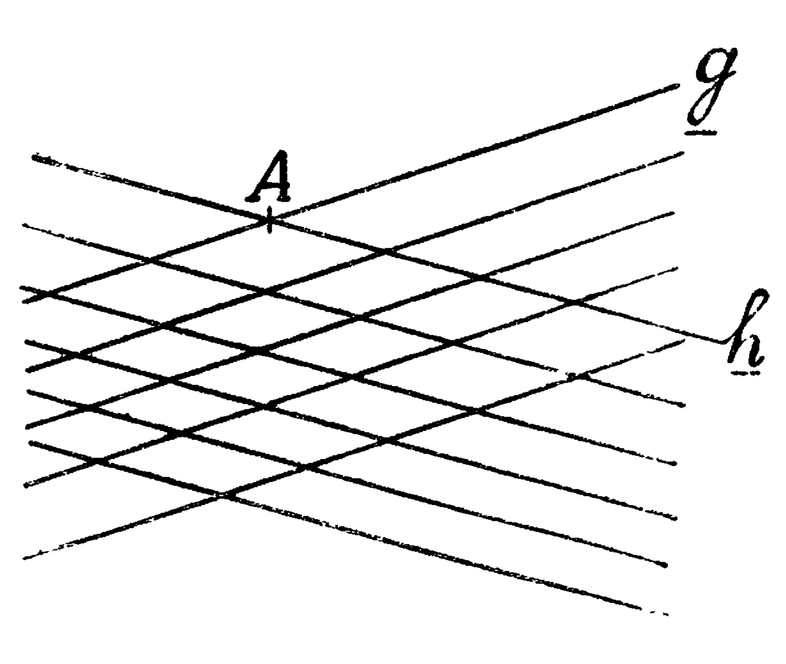
Одним из основных зрительных понятий, с которыми имеет дело проективная геометрия, является пересечение прямых. Если мы будем рассматривать прямые, лежащие в одной и той же плоскости, то из элементарной геометрии известно, что две данные прямые вообще пересекаются в одной точке, но могут и оказаться параллельными, т.-е. не имеющими ни одной общей точки. Такое положение дела не соответствует тому духу общности, которым проникнуты предложения проективной геометрии и который так резко отличает ее от геометрии древних. Поэтому указанные исключения устраняются ею путем расширения понятий о точке и прямой с помощью введения *несобственных* или *бесконечно-удаленных элементов.*

Дело заключается в следующем. Каждая из точек плоскости, бывших до сих пор в нашем распоряжении (это — так наз. *собственные* точки), может послужить центром

пучка прямых. На ряду с такими пучками сходящихся прямых, существуют пучки параллельных прямых, т.-е. — совокупности прямых, лежащих в данной плоскости и параллельных друг другу (так, на черт. 14 в плоскости ε_1 получился пучок параллельных прямых). Обе совокупности прямых называются общим именем пучков, и это — потому, что их основные свойства одни и те же, а именно: 1) через данную точку плоскости проходит одна и только одна прямая данного пучка (в случае сходящегося пучка это будет прямая, соединяющая данную точку с его центром; в случае же параллельности прямых это будет прямая, проходящая через данную точку параллельно прямым пучка); 2) любые две прямые пучка вполне его определяют (в случае сходимости прямых, любые две из них своим пересечением определят центр пучка; в случае же параллельности, любые две прямые пучка покажут, во-первых, что мы действительно имеем дело с совокупностью параллельных прямых, и, во-вторых, каждая из них определит их общее направление). Однако, при наличии такого сходства в основных свойствах, у наших пучков имеется и видимое различие: у пучка сходящихся прямых имеется центр, а у пучка параллельных прямых его нет. Стремясь к установлению наиболее общих предложений, мы решаем устранить это различие и для указанной цели условливаемся говорить, что у пучка параллельных прямых тоже имеется центр, но только таковым служит несобственная или бесконечно-удаленная точка. Введение этих новых элементов находит себе реальную опору не в чем ином, как в самих пучках параллельных прямых. Надо твердо запомнить, что утверждения: „прямая *a* содержит такую-то бесконечно-удаленную точку“, или „такая-то бесконечно-удаленная точка лежит на прямой *a*“ обозначают лишь то, что прямая *a* принадлежит такому-то вполне определенному пучку параллельных прямых. В конечном

счете, несобственные точки являются только особым названием для пучков параллельных прямых, тогда как собственные точки в проективной геометрии сплошь и рядом заменяют собою пучки сходящихся прямых.

Основываясь на правильном понимании вновь введенных терминов, нетрудно доказать, что *каждая прямая содержит одну и только одну бесконечно-удаленную точку*. Действительно, проводя в нашей плоскости прямые, параллельные данной a, получаем пучок параллельных прямых, который содержит и данную прямую a; другими словами, мы нашли уже несобственную точку, лежащую на прямой a. Положим теперь, что прямая a содержит две таких точки, т.-е. принадлежит одновременно двум различным пучкам параллельных прямых (см. черт. 18). Так как эти пучки различны, то их прямые взаимно пересекаются; так, напр., через точку A проходит прямая g одного пучка и прямая h другого. Обе эти прямые должны быть параллельны a, ибо по допущению последняя принадлежит обоим пучкам. Таким образом через точку A проведены две различные параллели к одной и той же прямой, что̀ невозможно; следовательно прямая a содержит только одну бесконечно-удаленную точку, что̀ и требовалось доказать.



Черт. 18.

Легко видеть, что в нашей плоскости имеется бесчисленное множество несобственных точек; в самом деле, меняя направление прямых, можно получить бесчисленное множество различных пучков с параллельными прямыми. Совокупность всех бесконечно-удаленных точек плоско-

сти будет часто встречаться в последующих рассуждениях; поэтому будет удобно обозначить ее особым термином. Назвать ее, конечно, можно как угодно; но предыдущее предложение показывает, что вполне *целесообразно* будет назвать эту совокупность „прямою“. Действительно, каждая обыкновенная прямая имеет с геометрическим местом несобственных точек плоскости лишь одну общую точку; а всякое геометрическое место, обладающее таким свойством в области собственных элементов, было бы необходимо прямой линией. На основании таких соображений, совокупность бесконечно-удаленных точек плоскости называется ***несобственной*** или ***бесконечно-удаленной прямой*** (а известные доселе прямые получают имя *собственных*).

Из понятия о несобственных элементах мы извлечем прежде всего ту пользу, что сможем установить, уже без всяких исключений, два основных предложения, касающихся сочетания основных элементов, а именно: „две точки определяют прямую“ и „две прямые всегда пересекаются в точке“. Действительно, пусть нам даны 2 различные точки A и B; возможны три случая:

1) Обе точки собственные; тогда они определяют соединяющую их собственную прямую AB.

2) Одна точка A — собственная, другая B — несобственная, представленная некоторым пучком параллельных прямых; искомая прямая проходит через A и параллельна прямым пучка, ибо она „содержит и бесконечно-удаленную точку B“.

3) Обе точки несобственные; тогда говорят, что они определяют бесконечно-удаленную прямую, состоящую лишь из несобственных точек.

Точно так же пусть нам даны 2 различные прямые a и b; и здесь возможны три случая:

1) Обе прямые — собственные и не параллельны; тогда

они определяют обыкновенную точку, служащую их пересечением.

2) Обе прямые — собственные, но параллельны; они определят тогда бесконечно-удаленную точку, представляемую пучком прямых, параллельных данным.

3) Одна прямая a — собственная, другая b — несобственная; снова получается бесконечно-удаленная точка, определяемая пучком прямых, параллельных a.

Теперь два найденных предложения можно так сопоставить друг с другом, что станет ясной их полная взаимность.

В геометрии на плоскости два предложения, или два образа, или два построения называются *взаимными*, если одно из них переходит в другое при перестановке терминов: „точка" и „прямая".

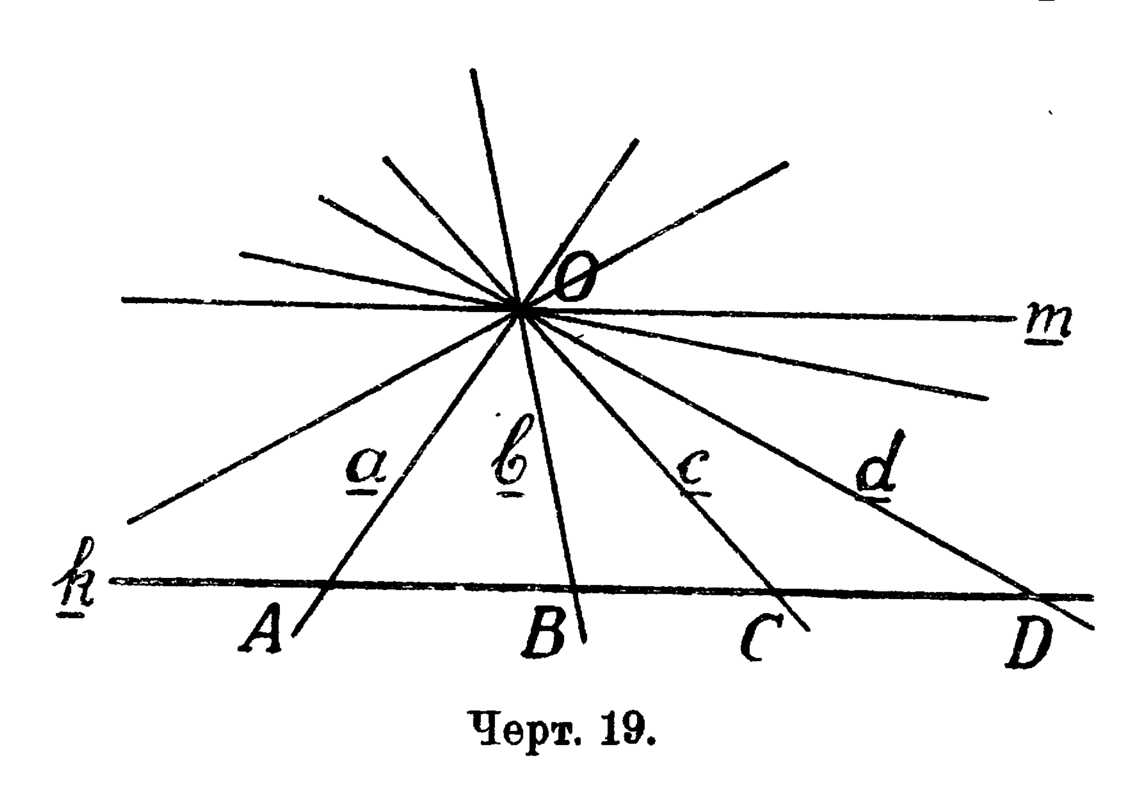
Только-что доказанные две общих теоремы можно сопоставить следующим образом, при котором бросается в глаза их взаимность:

Две различные точки определяют одну и только одну совмещенную с ними прямую.	*Две различные прямые определяют одну и только одну совмещенную с ними точку.*

В этих предложениях замечательно еще то, что собственные и несобственные элементы входят в них совершенно одинаково. Поэтому, поскольку проективная геометрия вытекает из подобных утверждений, в ней не делается никакого различия между собственными и несобственными элементами; введение такого различия в сущности переводит нас уже в область геометрии меры (известная нам элементарная геометрия). Важно еще подчеркнуть, что наши рассуждения всегда можно снабжать чертежами, имеющими дело с собственными элементами; действительно, чертеж является лишь вспомогательным средством; доказательство же состоит из выведения иско-

мого предложения из основных предложений проективной геометрии, а последние содержат собственные и несобственные элементы одинаковым образом.

Другим следствием предыдущих обобщений является *замкнутость* прямой проективной геометрии. В элементарной геометрии прямая есть линия незамкнутая и бесконечная; наглядно это можно выразить утверждением, что точка, удалившаяся в одном направлении по прямой, ни-



Черт. 19.

когда не вернется в исходное положение с помощью непрерывного движения и без изменения его направления. Но пучок прямых и в элементарной геометрии является замкнутой последовательностью своих элементов: непрерывным вращением в одном и том же направлении прямая пучка может описать весь пучок и вернуться в первоначальное положение. Но в проективной геометрии между точками прямой k и прямыми, проходящими через точку O (не лежащую на k; см. черт. 19), можно установить одно-однозначное соответствие. В самом деле, каждой точке A, B,... данной прямой в пучке O соответствуют прямые a, b,..., соединяющие их с точкой O; обратно, каждой прямой пучка соответствует точка пересечения ее с k; исключением не явится и прямая m, параллельная k, ибо эти

прямые имеют общую несобственную точку. В силу однозначности соответствия между элементами прямой и пучка, на первую переносится свойство замкнутости, присущее последнему. Дело обстоит так, как будто бы единственная бесконечно-удаленная точка замыкает дотоле незамкнутую прямую.

Снова получаем 2 взаимных предложения:

Прямая, как совокупность точек, есть замкнутый ряд.

Точка (пучок), как совокупность прямых, есть замкнутый ряд.

Примечание. Выше уже упоминалось, что в проективной геометрии под точкой часто понимается пучок, центром которого она служит.

Укажем теперь на пример двух взаимных образов, которые имеют большое значение в проективной геометрии; их описание расположим в 2 столбца:

Даны 4 прямые a, b, c, d, из которых никакие 3 не совмещены с одной точкой (черт. 20, 2); эти прямые, взятые попарно, определяют 6 точек: ab, ac, ad, bc, bd, cd (символ ab изображает точку, определяемую прямыми a и b, и т. д.). Фигура, образованная 4 данными прямыми и 6 указанными точками, называется *полным 4-сторонником;* прямые называются его *сторонами*, а точки — *вершинами*. Противоположные вершины: ab и cd,

Даны 4 точки A, B, C, D, из которых никакие 3 не совмещены с одной прямой (черт. 20, 1); эти точки, взятые попарно, определяют 6 прямых: AB, AC, AD, BC, BD, CD (символ AB изображает прямую, определяемую точками A и B и т. д.). Фигура, образованная 4 данными точками и 6 указанными прямыми, называеся *полным 4-угольником;* точки называются его *вершинами*, а прямые — *сторонами*. Противоположные стороны: AB и CD, AC и BD,

ac и *bd*, *ad* и *bc* определяют попарно 3 прямые:

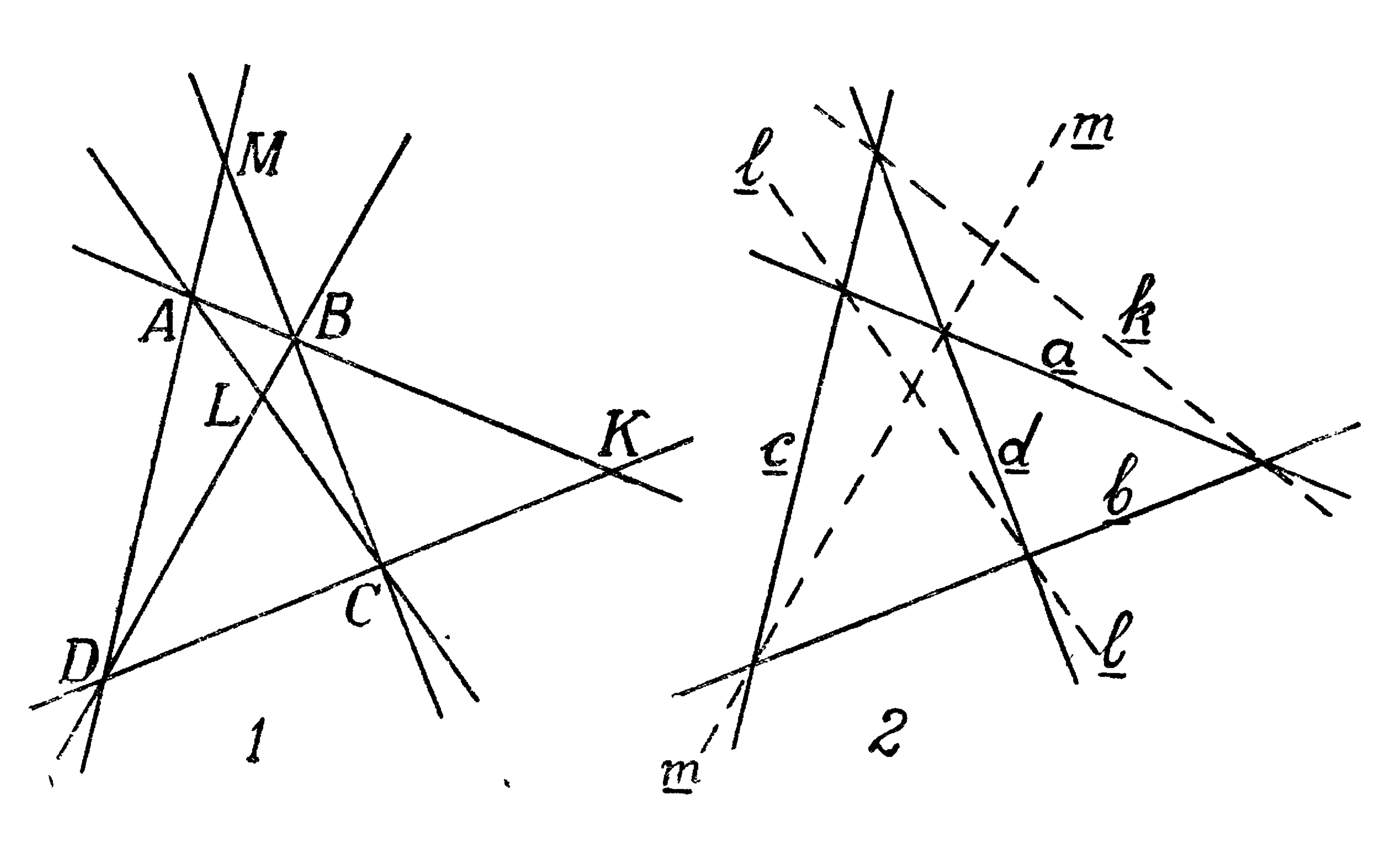
k, *l*, *m*,

которые называются *диагональными* прямыми.

AD и *BC* определяют попарно 3 точки:

K, *L*, *M*,

которые называются *диагональными* точками.



Черт. 20.

Мы действительно имеем основание эти два геометрических образа называть взаимными, так как описание одного получается из описания другого путем перестановки терминов: „точка“ и „прямая“ (а также: „вершина“ и „сторона“). Читатель поймет без дальнейших пояснений, что два основных образа: ряд точек (т.-е. совокупность точек, совмещенных с данной прямой) и пучок прямых (т.-е. совокупность прямых, совмещенных с данной точкой) — также будут взаимными между собой. Поэтому, когда мы делаем замену терминов: „точка“ — „прямая“, то вместе с этим надо делать также перестановку терминов: „ряд точек“ — „пучок прямых“ и вообще производить все

соответствующие изменения, обусловленные основной перестановкой.

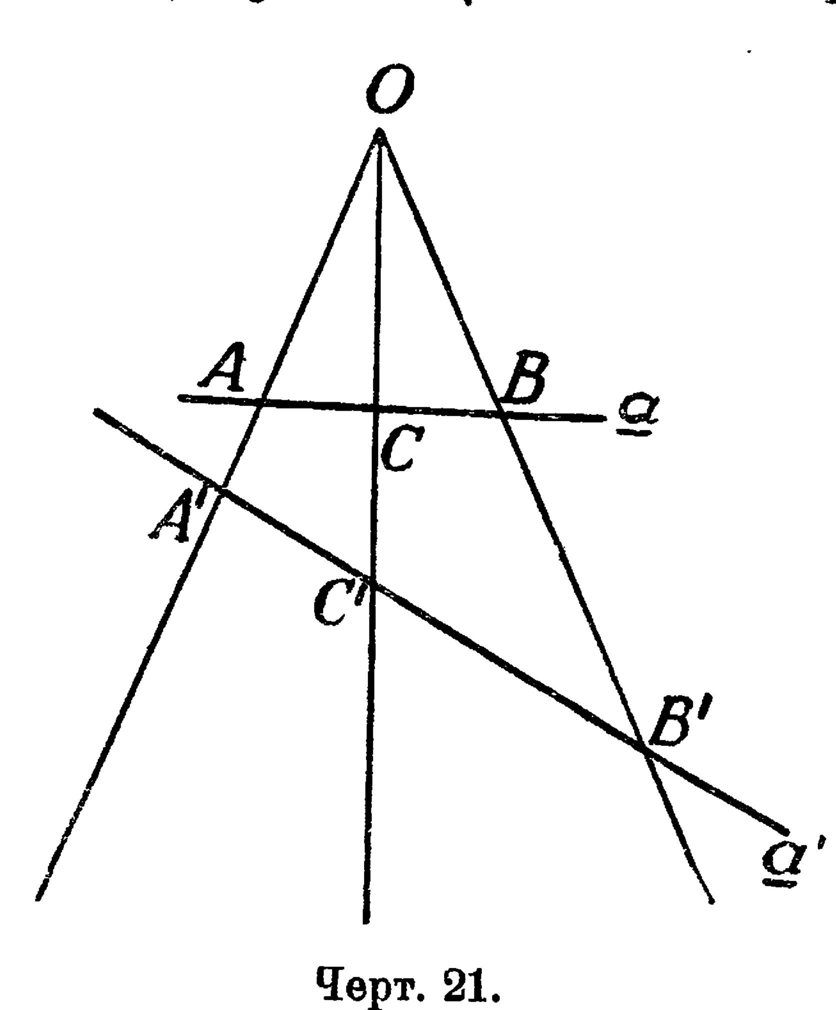
Наконец, в проективной геометрии имеются два *основных действия:* проектирование и сечение, которые также взаимны друг с другом:

Проектирование ряда точек из точки, ему не принадлежащей, заключается в построении всевозможных прямых, определяемых данной точкой и точками данного ряда.

Таким образом, посредством проектирования от ряда точек мы переходим к пучку прямых.

Сечение пучка прямых прямой, ему не принадлежащей, заключается в построении всевозможных точек, определяемых данной прямой и прямыми данного пучка.

Таким образом, посредством сечения от пучка прямых мы переходим к ряду точек.



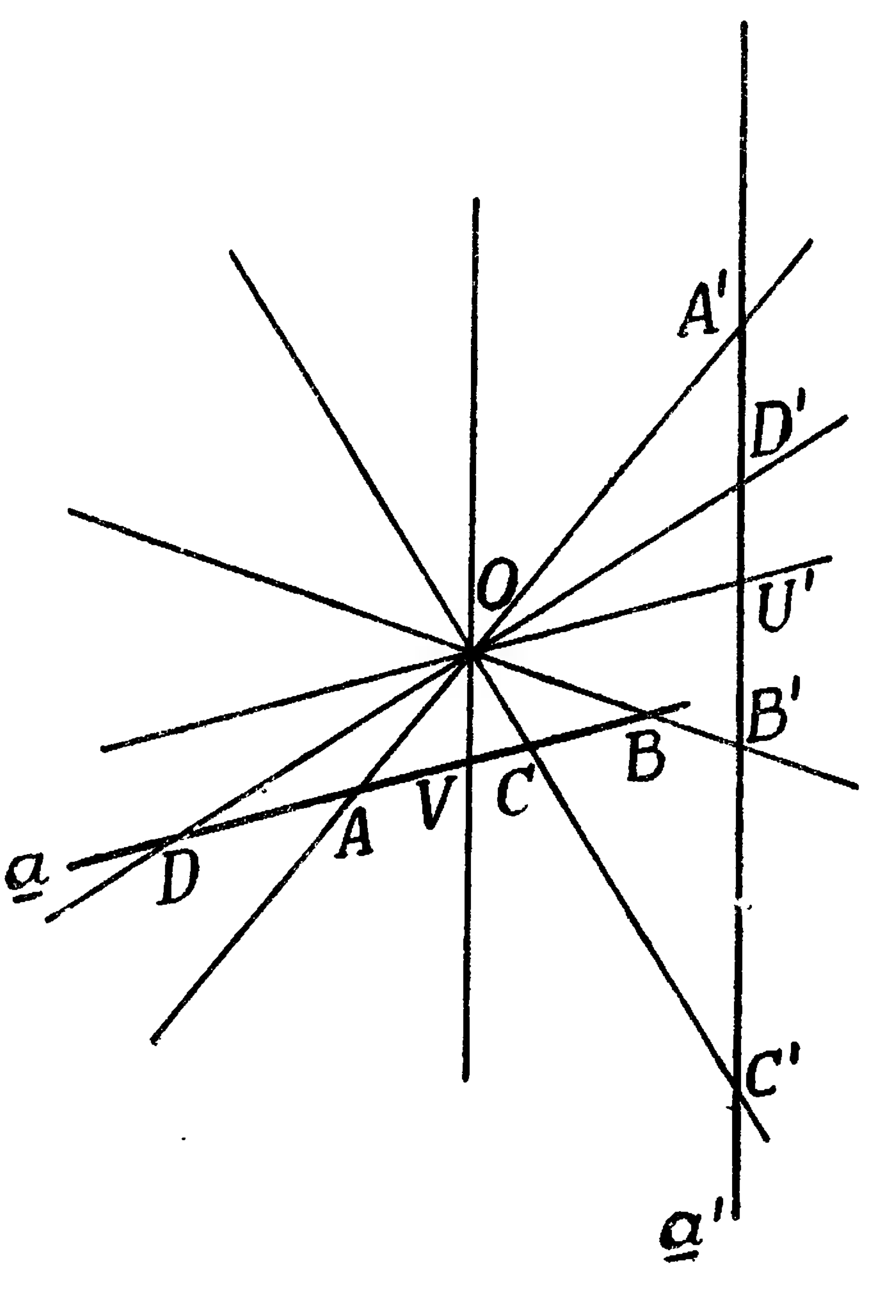
Черт. 21.

После изложенного, можно уже дать следующее определение интересующей нас науки:

Проективная геометрия изучает такие свойства геометрических образов, которые сохраняются при двух основных действиях.

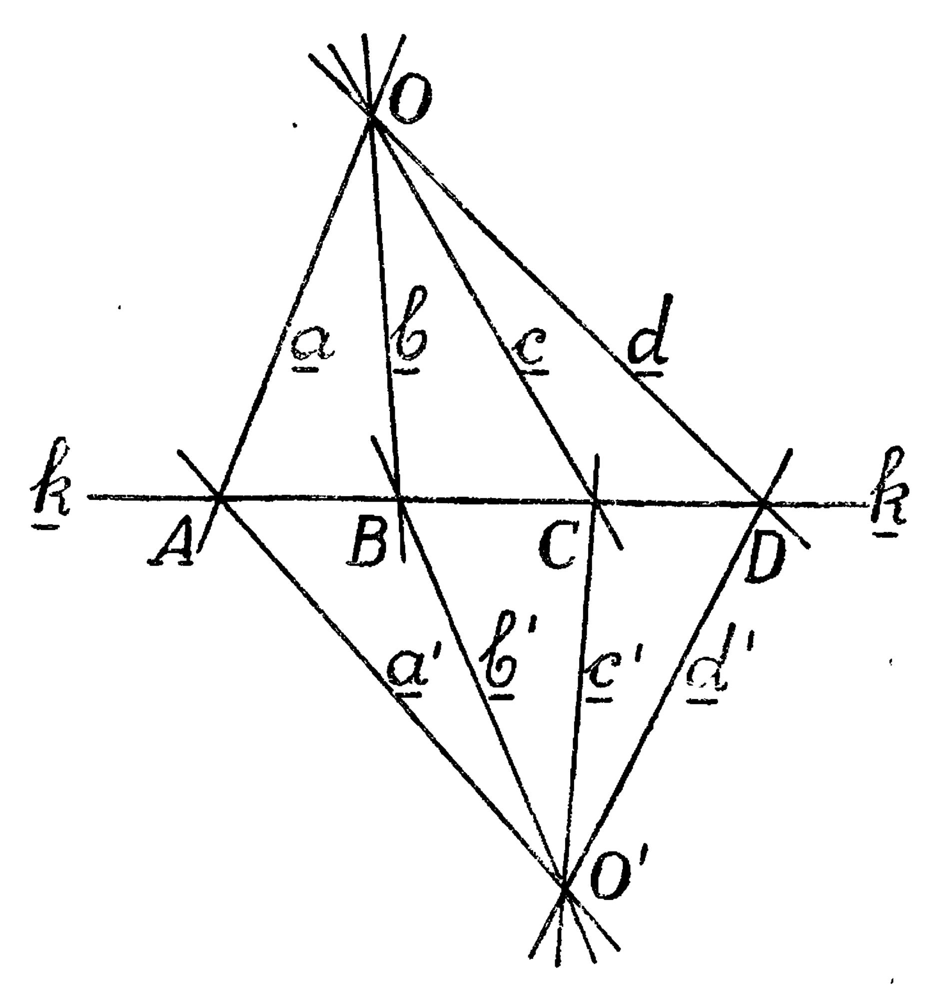
Покажем на нескольких примерах, какие свойства сохраняются и какие теряются при основных действиях. Так, было уже отмечено, что соотношения меры не сохраняются. Действительно, пусть отрезок AB в точке C делится

пополам (черт. 21); проектируем его из точки O и полученный пучок сечем прямою a', так что отрезок $A'C'B'$ получается из отрезка ACB при помощи основных действий, а точка C' соответствует точке C; но легко видеть, что C' вообще не будет серединой нового отрезка (она обладает этим свойством лишь при $a' \parallel a$). Вообще отношение, в котором разделен отрезок какой-нибудь точкой, не сохраняется при основных действиях. Но и не всякое свойство, относящееся к расположению элементов, обладает неизменяемостью по отношению к проектированию и сечению. Так, на черт. 21 положение точки C *между* A и B сохранилось, ибо и точка C' лежит между A' и B'; но не так обстоит дело на черт. 22, где точка C попрежнему лежит между A и B, а точка C' находится вне отрезка $A'B'$. Если же на прямой взять 4 точки, то нетрудно прийти к такому понятию расположения их, которое уже сохраняется при основных действиях, а потому имеет важное значение для проективной геометрии. В самом деле, четыре точки одной прямой всегда можно одним единственным способом разбить на 2 пары, так что точки одной пары *разделяются* точками



Черт. 22.

другой; так, напр., на прямой *a* (черт. 22) точки расположены таким образом, что пара *A*, *B* разделяется парой *C*, *D*. Вот это отношение *разделения пар* сохраняется при наших основных действиях, как видно и на черт. 22: пара *A'*, *B'* разделяется парой *C'*, *D'*. Понятие о разделении двух пар элементов (все сказанное можно перенести и на прямые пучка) является основным в вопросе о расположении в проективной геометрии.



Черт. 23.

Выше мы уже имели случай упомянуть о той важной роли, которую играет в проективной геометрии понятие об однозначном соответствии; остановимся немного на этом вопросе.

Два основных образа называются *соотнесенными*, если между их элементами установлено одно-однозначное соответствие, так что каждому элементу одного образа отвечает один и только один элемент другого. Простейший способ соотнести пучок прямых и ряд точек заключается в том, что соответственными считаются элементы, совмещенные друг с другом; благодаря введению несобственных элементов, однозначность соответствия не потерпит нарушения. Пучок прямых и ряд точек, соотнесенные указанным способом, называются *перспективными* (напр., пучок *O* и ряд точек *k* на черт. 19); два же одноименные основные образа

называются *перспективными* в том случае, если они перспективны (в предыдущем смысле этого слова) с одним и тем же основным образом; так, напр., ряды точек $A, B, C, D,\ldots$ и $A', B', C', D',\ldots$ (черт. 22) будут таковыми, ибо они перспективны с одним и тем же пучком O; а на черт. 23 имеем 2 перспективных пучка O и O', так как они перспективны с одним и тем же рядом точек $A, B, C, D,\ldots$ Интересно остановиться на одной подробности: пусть даны 2 перспективных ряда a и a' (черт. 22), и спрашивается, какая точка одного ряда соответствует бесконечно-удаленной точке другого. Обозначим бесконечно-удаленную точку прямой a через U; тогда, для нахождения соответственной ей точки U', надо из центра O провести прямую, соединяющую его с точкой U, т.-е. прямую, параллельную прямой a; сечение этой последней второю прямою a' даст искомую точку U'. Точно так же точка V, соответствующая бесконечно-удаленной точке V' прямой a', найдется, как пересечение a с прямой, проходящей через O и параллельной a'. Таким образом мы убеждаемся, что, при основных действиях, собственные точки могут переходить в несобственные, и обратно; отсюда уже следует, что указанное различие не может быть существенным для проективной геометрии; но для геометрии меры оно — существенно.

До сих пор мы имели дело с понятиями *графического* характера; но для дальнейшего изложения, согласно духу старой школы, приходится заимствовать одно понятие из геометрии меры, которое однако сохраняется при основных действиях, а потому и может получить значение для проективной геометрии.

Здесь снова придется иметь дело с 4 элементами основного образа. Возьмем сначала на прямой 4 какие-нибудь различные точки A, B, C, D (черт. 24); *двойным* или *ангармоническим отношением* этих точек, которое обозначается

символом $(ABCD)$, называется следующее выражение, составленное из отрезков данной прямой:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}.$$

Мы должны сейчас же напомнить читетелю одно правило, введенное в предыдущей главе: отрезки, отложенные в противоположные стороны, выражаются числами разных знаков. Отсюда вытекает то

A D B C

Черт. 24.

следствие, что двойное отношение $(ABCD)$ будет отрицательным, если пара A, B разделяется парой C, D, и оно будет положительным, если указанное разделение не имеет места. Действительно, черт. 24, где одна пара разделяется другой, показывает что отрезки AC, AD, BC будут одного знака, а отрезок BD — другого, так что

$$(ABCD) < 0;$$

на черт. 25 разделения пар A, B и D', D не имеется, а так как отрезки AD' и AD, BD' и BD — одного знака, то

$$(ABD'D) > 0.$$

Когда выписываем символ, обозначающий двойное отношение, то надо обращать большое внимание на порядок, в котором называются элементы, ибо с изменением их порядка меняется и правая часть равенства (1), содержащая отрезки между точками, стоящими на определенных местах в левой части. Так, напр., имеем:

A D D' B

Черт. 25.

$$(BADC) = \frac{BD}{BC} : \frac{AD}{AC} = \frac{AC \,.\, BD}{AD \,.\, BC} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD},$$

откуда

$$(BADC) = (ABCD);$$

но на ряду с этим

$$(2) \ldots\ldots\ldots (BACD) = \frac{BC}{BD} : \frac{AC}{AD} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Двойное отношение имеет еще важное свойство, которое надо сейчас отметить, а именно: если дана его величина и три точки из 4-х, то 4-я определяется одним единственным образом. Другими словами:

Если $(ABCD) = (ABCD')$, *то* D' *совпадает с* D.

Действительно, развертывая данное равенство, имеем:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD'} : \frac{BC}{BD'};$$

отсюда, сокращая равные отрезки, выводим

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BD'}{AD'}.$$

Таким образом, точки D и D' делят отрезок AB в одном и том же отношении (внутренним образом, если оба отношения отрицательны, и внешним, если они положительны). Останавливаясь, для определенности, на первом допущении, попробуем предположить, что точки D, D'—различны и расположены так, как это указано на черт. 25. Тогда, имея дело с длинами отрезков (и не обращая внимания на их знаки), пишем:

$$\frac{BD}{AD} > \frac{BD'}{AD} > \frac{BD'}{AD'},$$

а это противоречит данному нам равенству. След. D должна совпадать с D, что и требовалось доказать.

В том частном случае, когда величина двойного отношения равна (—1), оно называется *гармоническим* *); в таком случае имеем:

$$(ABCD) = -1,$$

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1$$

или

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD},$$

т.-е.: точки A и B делят отрезок CD в одном и том же отношении, но только одна из них делит его внутренним образом, а другая — внешним; след. пара A, B всегда разделяет пару C, D.

На ряду с двойным отношением 4-х точек прямой, рассматривается подобное же соотношение между 4 прямыми пучка. Пусть a, b, c, d суть 4 различные прямые какого-нибудь пучка (см., напр., черт. 19); понимая под символами (ac), (ad),... углы между указанными прямыми, под *двойным отношением* $(abcd)$ четырех данных прямых понимают следующее выражение, составленное из синусов углов между ними:

$$(3) \ldots\ldots\ldots (abcd) = \frac{\operatorname{Sin}(ac)}{\operatorname{Sin}(ad)} : \frac{\operatorname{Sin}(bc)}{\operatorname{Sin}(bd)};$$

выражение в правой части построено по правилу, весьма напоминающему формулу (1). Если нам дан пучок параллельных прямых, то указанное определение теряет смысл. Тогда под двойным отношением $(abcd)$ понимают такое же отношение 4-х точек $(ABCD)$, которые получаются в се-

*) В объяснение названия надо сказать, что здесь между некоторыми отрезками получается соотношение, с которым древние встретились в своей теории музыкальных тонов.

чении данных прямых любою прямою; известное свойство параллельных линий показывает, что величина $(ABCD)$ не зависит от выбора вспомогательной прямой.

Важность двойных отношений для проективной геометрии обосновывается следующей теоремой:

Если пучок прямых и ряд точек перспективно соотнесены друг другу, то двойное отношение 4-х любых прямых пучка равно двойному отношению 4-х соответственных точек.

Пусть (на черт. 19) даны пучок O и прямая k в перспективном положении; остановимся на 4-х каких-нибудь прямых пучка a, b, c, d и на соответствующих им точках A, B, C, D. Площади Δ-ов OAC и OAD можно вычислить двояко; с одной стороны, по известной теореме геометрии, имеем:

$$\frac{1}{2} AC \,.\, h \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} AD \,.\, h$$

(ибо высота у них общая, так как основания лежат на одной прямой); с другой стороны, тригонометрия дает:

$$\frac{1}{2} \,.\, OA \,.\, OC \,.\, \mathrm{Sin}\,(ac) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \,.\, OA \,.\, OD \,.\, \mathrm{Sin}\,(ad).$$

Сравнивая, получаем равенства:

$$AC \,.\, h = OA \,.\, OC \,.\, \mathrm{Sin}\,(ac)$$
$$AD \,.\, h = OA \,.\, OD \,.\, \mathrm{Sin}\,(ad);$$

деля одно на другое, приходим к пропорции:

$$(*) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{AC}{AD} = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,(ac)}{\mathrm{Sin}\,(ad)}.$$

Точно так же рассмотрение Δ-ов OBC и OBD приведет

к другой пропорции (везде надо поменять буквы A и B, a и b):

$$(**) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{BC}{BD} = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,(bc)}{\mathrm{Sin}\,(bd)}.$$

Остается равенство (*) почленно разделить на (**), и мы придем к соотношению:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{\mathrm{Sin}\,(ac)}{\mathrm{Sin}\,(ad)} : \frac{\mathrm{Sin}\,(bc)}{\mathrm{Sin}\,(bd)}.$$

Собственно говоря, в этом равенстве везде стоят численные значения величин AC, AD...., ибо мы опирались на формулы для площади Δ-ка, куда входят исключительно положительные величины, тогда как при составлении двойного отношения могут встретиться отрицательные отрезки и углы. Мы знаем, что двойное отношение имеет тот или другой знак в зависимости от наличия известного разделения пар; знаем также, что последнее сохраняется при основных действиях; а потому в предыдущем соотношении имеет место не только равенство численных значений, но и одинаковость знаков. Таким образом мы получаем равенство:

$$(ABCD) = (abcd),$$

что и требовалось доказать*).

Полученный результат можно высказать в иной форме. Дело в том, что перспективные пучок прямых и ряд точек получаются друг из друга с помощью того или другого основного действия: ряд точек есть сечение пучка,

*) Собственно, надо еще рассмотреть случаи, когда прямая k параллельна одной из 4-х прямых, и когда имеем дело с пучком параллельных прямых; но мы позволим себе не входить в эти подробности.

а пучок можно получить, проектируя данный ряд точек. Поэтому, применяя один технический термин, можно сказать, что *двойное отношение является инвариантом по отношению к основным действиям.*

Отсюда сейчас же вытекает, что оно сохраняет свою величину при любых основных действиях, произведенных в конечном числе; другими словами:

Если один основной образ получается из другого с помощью конечного числа основных действий, то двойное отношение 4-х любых элементов одного образа равно двойному отношению 4-х соответственных элементов другого.

Это предложение можно назвать *обобщенной теоремой Паппа;* собственно же теорема названного геометра относилась к двум различным сечениям одного и того же пучка.

Теперь в наших руках имеются все основные предложения проективной геометрии на плоскости; перечислим их:

1) два взаимных предложения о сопряжении точек и прямых;

2) свойства замкнутости пучка прямых и прямолинейного ряда точек;

3) равенство (при известных условиях) двойных отношений 4-х прямых и 4-х соответственных им точек.

Во всех этих исходных предложениях можно поменять местами термины: „точка" и „прямая"; при этом они не теряют своей истинности, а переходят друг в друга. Следовательно такую же замену можно сделать и во всех предложениях, вытекающих из указанных, и мы приходим к весьма важному *закону взаимности:*

Во всякой теореме проективной геометрии на плоскости, не нарушая ее справедливости, можно поменять местами термины: „точка" и „прямая", произведя соответствующие изменения и в других терминах (напр.: „пучок прямых" —

„ряд точек“, „полный 4-угольник“ — „полный 4-сторонник“, и т. д.).

Таким образом закон взаимности позволяет из двух взаимных предложений доказывать только одно, что̀ сокращает работу вдвое; он дает также возможность вывести новое предложение из ранее известного.

Надо помнить, что этот закон есть достояние проективной геометрии, но в обыкновенной геометрии меры он вообще не оправдывается; так, напр., в последней имеем: „пучок прямых есть замкнутая совокупность элементов“, но — „прямолинейный ряд точек есть незамкнутая совокупность“; „две различные точки всегда определяют прямую“, но — „две различные прямые (одной плоскости) не всегда определяют точку“, и т. п.

Как приложение полученных теорем, докажем предложение о *гармонических свойствах полного 4-сторонника и полного 4-угольника;* здесь получаются 2 взаимных предложения, и в силу закона взаимности было бы достаточно доказать лишь одно из них; но для выяснения самого этого закона мы проведем все рассуждение в двух столбцах. Условимся сначала, что утверждение: „две точки гармонически разделяются двумя прямыми“ имеет тот смысл, что, присоединив к данным точкам еще точки пересечения определяемой ими прямой с двумя данными прямыми, получим 4 точки, для которых двойное отношение $= -1$; точно так же утверждение: „две прямые гармонически разделяются двумя точками“ обозначает то, что данные прямые, в соединении с прямыми, соединяющими точку их пересечения с двумя данными точками, образуют двойное отношение $= -1$.

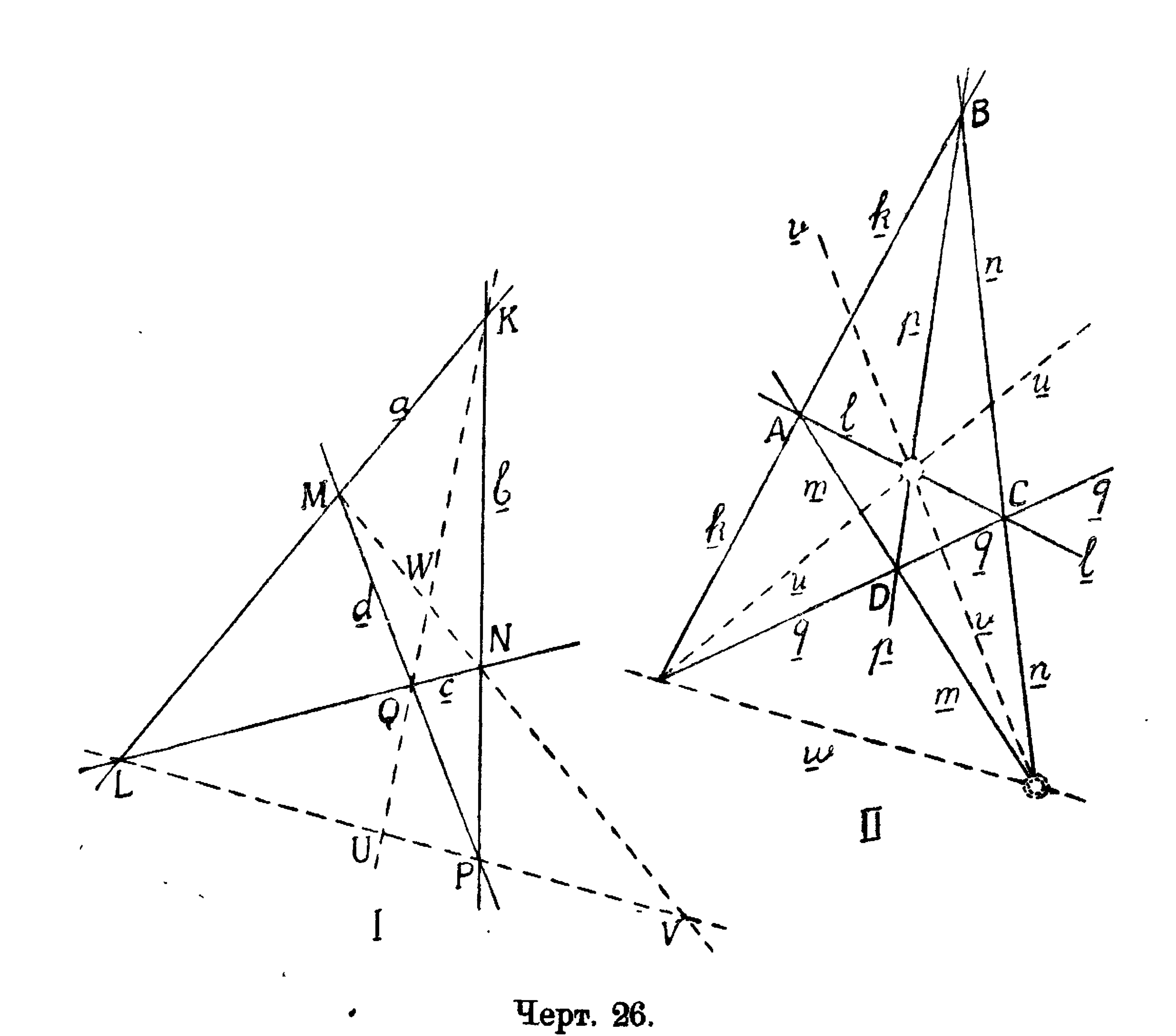
После такого условия, упомянутое предложение можно высказать так:

В полном 4-сторонние каждые две противоположные

В полном 4-угольнике каждые две противоположные сто-

вершины гармонически разделяются обеими диагональными прямыми, которые попарно соединяют остальные противоположные вершины.

роны гармонически разделяются обеими диагональными точками, в которых попарно пересекаются остальные противоположные стороны.



Черт. 26.

На черт. 26, I изображен полный 4-сторонник, у которого:

a, *b*, *c*, *d* — стороны,

K, *L*, *M*, *N*, *P*, *Q* — вершины,

На черт. 26, II изображен полный 4-угольник, у которого:

A, *B*, *C*, *D* — вершины,

k, *l*, *m*, *n*, *p*, *q* — стороны,

KQ, MN, LP — диагональные прямые *).

Для определенности, поставим себе задачу доказать, что вершины L и P гармонически разделяются диагональными прямыми KQ и MN; другими словами, надо доказать, что двойное отношение $(LPUV) = -1$.

Ряд точек L, P, U, V проектируем из точки K и полученный пучок прямых сечем прямою MN; данные точки преобразуются в M, N, W, V.

На основании теоремы Паппа, имеем:

$$(LPUV) = (MNWV).$$

Далее ряд точек M, N, W, V проектируем из точки Q и полученный пучок прямых сечем прямою LP; указанные точки переходят в P, L, U, V.

kq, mn, lp — диагональные точки *).

Для определенности, поставим себе задачу доказать, что стороны l и p гармонически разделяются диагональными точками kq и mn; другими словами, надо доказать, что двойное отношение $(lpuv) = -1$.

Пучок прямых l, p, u, v сечем прямою k и полученный ряд точек проектируем из точки mn; данные прямые преобразуются в m, n w, v.

На основании теоремы Паппа, имеем:

$$(lpuv) = (mnwv).$$

Далее пучок прямых m, n, w, v сечем прямою q и полученный ряд точек проектируем из точки lp; указанные прямые переходят в p, l, u, v.

*) Между обозначениями чертежей 26, I и 26, II установлено то соответствие, что если точка K является пересечением прямых a и b, то прямая k соединяет точки A и B; если на прямой a лежат точки K, L, M, то через точку A проходят прямые k, l, m, и т. д. Обозначения правого чертежа могут представить для читателя некоторые трудности; мы более привыкли обозначать точки отдельными буквами, а соединяющие их прямые — парами букв, чем наоборот — обозначать прямые отдельными буквами, а точки их пересечения — парами букв. Но с этой трудностью надо справиться.

При этом снова имеем

$$(MNWV)=(PLUV).$$

Сопоставление обоих равенств дает

$$(LPUV)=(PLUV);$$

а так как

$$(PLUV)=\frac{1}{(LPUV)},$$

то

$$(LPUV)^2=1,$$

откуда:

$$(LPUV)=\pm 1.$$

Нетрудно видеть, что это двойное отношение должно быть отрицательным, так как пара L, P разделяется парой U, V; следовательно

$$(LPUV)=-1,$$

что и требовалось доказать.

При этом снова имеем

$$(mnwv)=(pluv).$$

Сопоставление обоих равенств дает

$$(lpuv)=(pluv);$$

а так как

$$(pluv)=\frac{1}{(lpuv)},$$

то

$$(lpuv)^2=1,$$

откуда:

$$(lpuv)=\pm 1.$$

Нетрудно видеть, что это двойное отношение должно быть отрицательным, так как пара l, p разделяется парой u, v; следовательно

$$(lpuv)=-1,$$

что и требовалось доказать.

На очереди стоит введение одного понятия первостепенной важности, что̀ уже видно из его названия, совпадающего с названием рассматриваемой отрасли геометрии.

Два основных образа называются *проективными*, если они соотнесены и если двойное отношение 4-х любых элементов одного равно двойному отношению соответственных элементов другого. Для указания проективности иногда употребляется знак $\overline{\wedge}$.

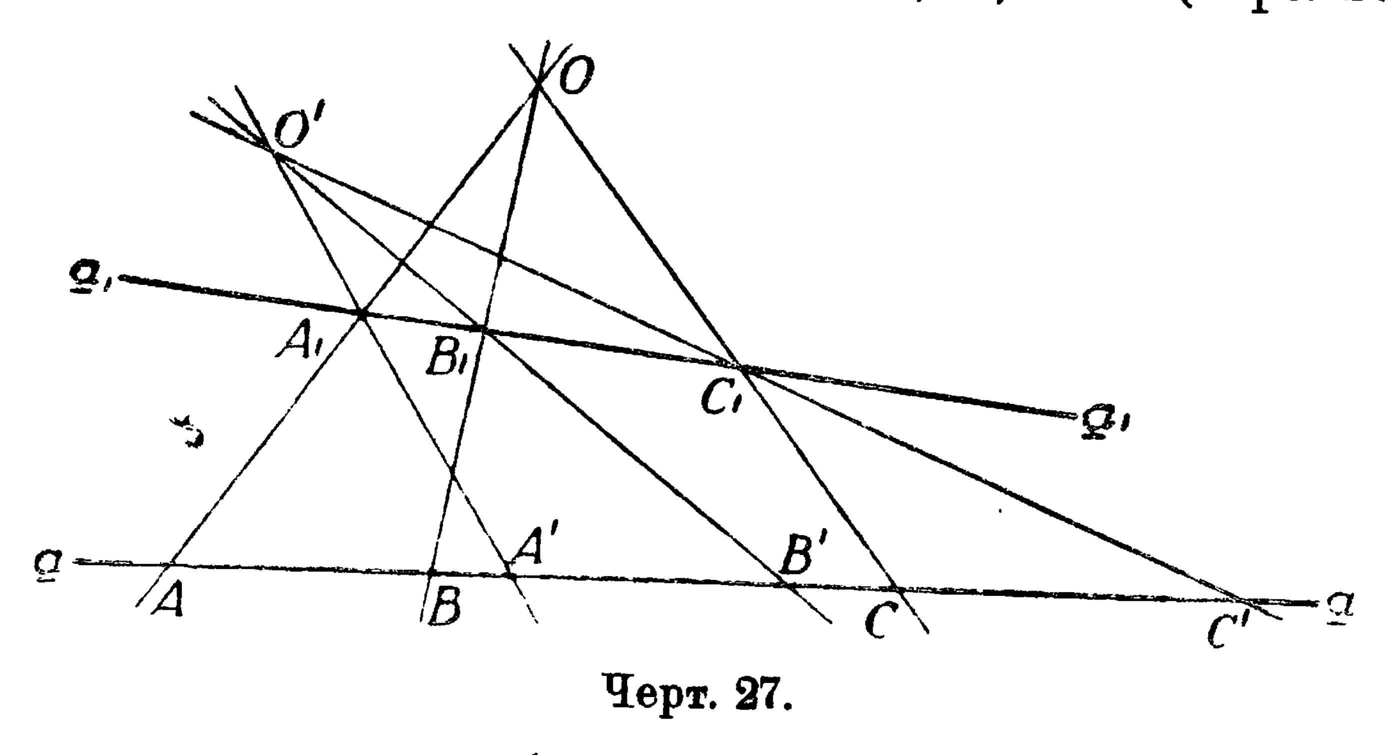
Обобщенная теорема Паппа сейчас же приводит к предложению:

Если один основной образ получается из другого с помощью конечного числа основных действий, то эти образы проективны

)в частности, перспективные образы проективны); обратная теорема будет приведена ниже.

Легко видеть также, что 2 основных образа, проективные с 3-им, проективны между собой.

Два одноименных проективных образа называются *наложенными*, если они имеют одного и того же носителя. Так, напр., исходя из ряда точек $A, B, C \dots$ (черт. 27) и



Черт. 27.

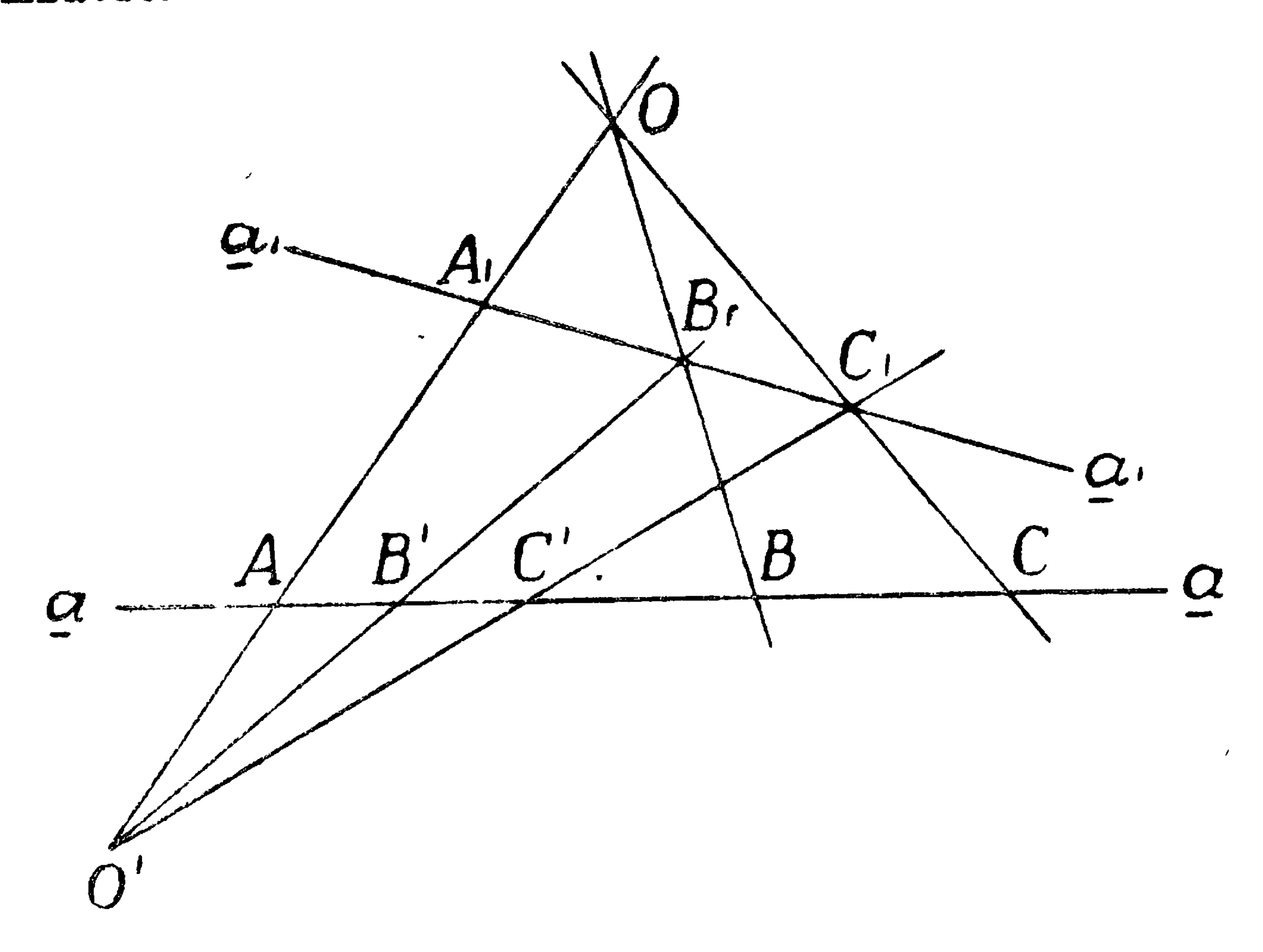
произведя над ним ряд основных действий (а именно: проектирование из точки O, сечение прямой a_1, проектирование из другой точки O' и наконец сечение первоначально данной прямою a), получаем на той же самой прямой другой ряд точек $A', B', C', \dots$ при чем, на основании предыдущей теоремы, имеем:

$$A, B, C, \dots \barwedge A', B', C', \dots$$

В подобных случаях каждую точку прямой a приходится рассматривать двояко: как принадлежащую 1-му ряду и как принадлежащую 2-му. Вообще говоря, две соответственные точки наших рядов будут различными (как, напр.: A и A', B и B', ...); но может случиться, что какой-либо точке одного ряда в другом ряду соответствует эта же самая точка. Так, на черт. 28 сделано то же самое построение, что̀ и выше; только точка O' взята на пря-

мой OA; следствием является то, что теперь точка A соответствует самой себе.

Если в 2-х наложенных проективных образах какой-либо элемент соответствует самому себе, то такой элемент называется *двойным.*



Черт. 28.

Имеет место следующая основная теорема:

Если в двух наложенных проективных образах имеются три двойных элемента, то эти образы тожественны (т.-е. каждый элемент будет двойным).

Действительно, пусть A, B, C будут упомянутыми двойными элементами; X — какой-нибудь элемент одного образа и X' — соответственный ему элемент другого образа. По самому определению проективности

$$(ABCX) = (ABCX');$$

но ранее было установлено, что в таком случае X' совпадает с X, что и требовалось доказать.

Из доказанной основной теоремы мы выведем некоторые следствия.

Если нам даны проективные ряд точек и пучок прямых и если 3 элемента одного образа совмещены с соответственными элементами другого, то это же самое имеет место для каждой пары соответственных элементов, т.-е. данные образы перспективны.

Пусть, именно, прямые a, b, c совмещены с соответственными им точками A, B, C. На данной прямой мы имеем два наложенных проективных ряда точек: данный ряд и ряд точек, получаемый в сечении с данным пучком; по условиям теоремы, точки A, B, C будут двойными элементами; следовательно оба ряда — тожественны, откуда и следует теорема.

Дальнейшей целью наших рассуждений будет установить, что два проективных образа всегда могут быть получены один из другого с помощью основных действий. Для перспективных образов утверждение это очевидно, так что указанный случай из последующего исключается. Далее, если нам даны проективные ряд точек и пучок прямых, то, проектируя ряд точек, получим пучок, проективный с данным пучком; точно так же сечение пучка прямых даст ряд точек, проективный с данным рядом. Таким образом рассмотрение разноименных образов всегда можно свести к рассмотрению одноименных; для последних же всегда имеет место теорема:

Два проективных одноименных основных образа перспективны с одним и тем же 3-им одноименным с ними основным образом.

Здесь мы снова рассмотрим оба взаимных предложения самостоятельно.

Даны 2 проективных ряда точек:

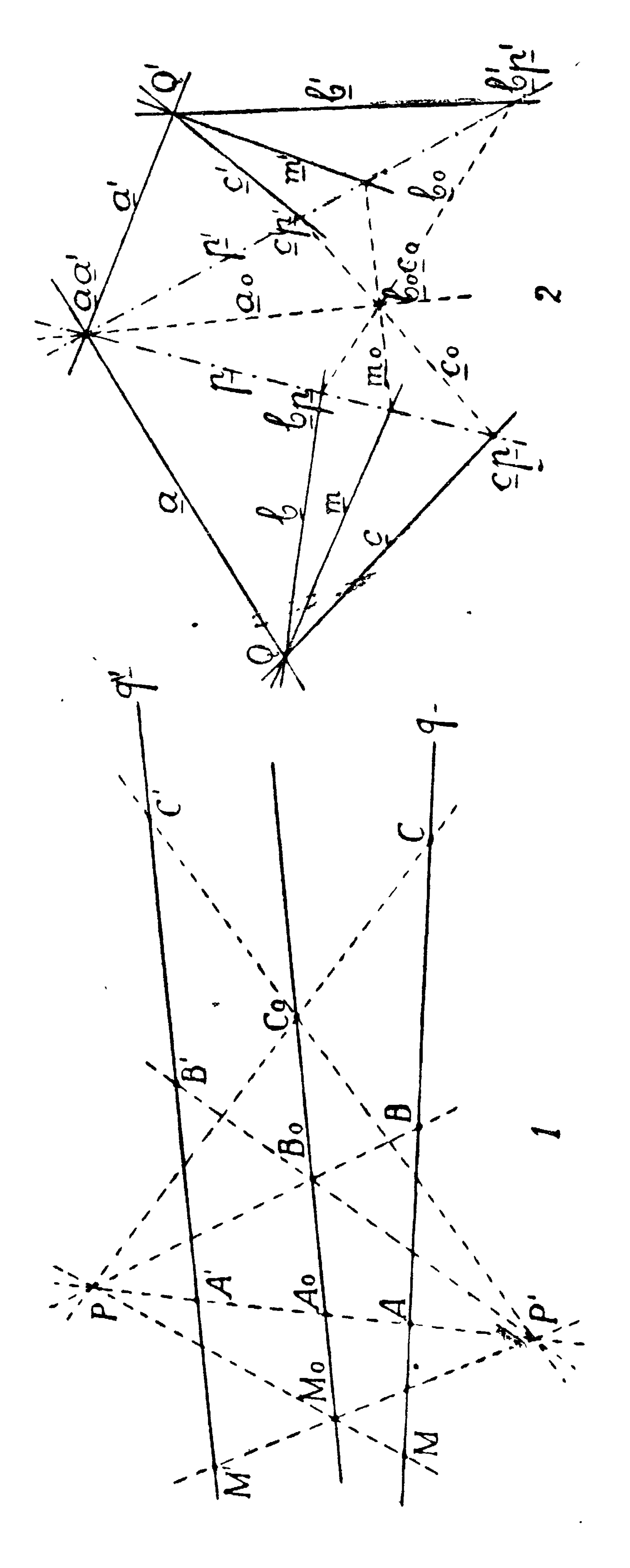
$A, B, C, \ldots \barwedge A', B', C', \ldots$

(черт. $29,_1$).

Даны 2 проективных пучка прямых:

$a, b, c, \ldots \barwedge a', b', c', \ldots$

(черт. $29,_2$).



Черт. 29.

На прямой AA' берем 2 произвольных точки P и P'; проектируя из точки P ряд точек q, а из точки P'— ряд q', получаем 2 проективных пучка:

$$PA, PB, PC, \ldots \barwedge P'A', P'B', P'C', \ldots$$

Пусть точки B_0 и C_0 будут соответственно пересечениями прямых PB и $P'B'$, PC и $P'C'$, а точка A_0 определяется, как пересечение прямых B_0C_0 и AA' (с которой совпадают обе прямые PA и $P'A'$).

Упомянутые выше пучки, в сечении с прямою B_0C_0, дадут 2 наложенных проективных ряда точек; легко видеть, что точки A_0, B_0, C_0 будут двойными элементами. След. указанные ряды точек тожественны, и каждый из данных рядов $A, B, C, \ldots$ и $A', B', C', \ldots$ будет перспективен с одним и тем же рядом $A_0, B_0, C_0, \ldots$, что и требовалось доказать.

Мы можем сказать, что 2-й ряд точек получается из 1-го вообще с помощью

Через точку aa' проводим 2 произвольные прямые p и p'; пересекая прямою p пучок Q, а прямою p' — пучок Q', получаем 2 проективных ряда точек:

$$pa, pb, pc, \ldots \barwedge p'a', p'b', p'c', \ldots$$

Пусть прямые b_0 и c_0 соответственно соединяют точки pb и $p'b'$, pc и $p'c'$, а прямая a_0 определяется, как соединяющая точки b_0c_0 и aa' (с которой совпадают обе точки pa и $p'a'$).

Упомянутые выше ряды точек, при проектировании их из точки b_0c_0, дадут 2 наложенных проективных пучка; легко видеть, что прямые a_0, b_0, c_0 будут двойными элементами. След. указанные пучки прямых тожественны, и каждый из данных пучков $a, b, c, \ldots$ и $a', b', c', \ldots$ будет перспективен с одним и тем же пучком $a_0, b_0, c_0, \ldots$, что и требовалось доказать.

Мы можем сказать, что 2-й пучок получается из 1-го вообще с помощью 4-х

4-х основных действий: проектирование из точки P, сечение прямою B_0C_0, проектирование из P' и сечение прямою q'.

Эти соображения дают нам удобный способ построения для каждой точки M ряда q соответствующей точки M' ряда q' (см. черт.).

основных действий: сечение прямою p, проектирование из точки b_0c_0, сечение прямою p' и проектирование из точки Q'.

Эти соображения дают нам удобный способ построения для каждой прямой m пучка Q соответствующей прямой m' пучка Q' (см. черт.).

В предыдущих построениях мы неизменно задавали два проективных образа с помощью 3-х пар соответственных элементов; это было не случайно, ибо имеет место теорема:

Для установления проективности между двумя основными образами можно 3-м любым элементам одного образа привести в соответствие 3 любых элемента другого; это задание вполне определяет проективное соотношение.

Действительно, из предыдущих построений видно, что подобное задание на самом деле устанавливает проективное соответствие; его единственность следует из теоремы о 3-х двойных элементах.

Мы приближаемся к завершению настоящего краткого очерка, а именно — к построению конических сечений. К намеченному вопросу можно подойти следующим образом.

Геометрическое место точек пересечения соответственных прямых в 2х перспективных пучках, по самому определению перспективности, будет прямою линией.

Возьмем теперь более общий случай и докажем следующую теорему:

Если даны 2 проективных (но не перспективных) пучка прямых, то геометрическое место точек пересечения соответ-

ственных прямых обладает тем свойством, что оно не может иметь с прямою более 2-х общих точек.

В самом деле, данные пучки, в сечении с любою прямою, дают два наложенных проективных ряда точек; всякая точка пересечения указанной прямой с искомым геометрическим местом обладает тем свойством, что в ней пересекаются две соответственных прямых проективных пучков; следовательно такая точка является двойным элементом в указанных наложенных рядах. Если бы рассматриваемая прямая пересекала искомое геометрическое место в 3-х точках, то имелось бы также 3 двойных элемента; но тогда наши ряды точек совпали бы, соответственные прямые данных пучков пересекались бы по точкам одной и той же прямой, и эти пучки оказались бы перспективными, что̀ противоречит заданию.

Полученный результат можно высказать иначе, пользуясь терминологией аналитической геометрии: искомое геометрическое место точек есть *линия 2-го порядка*; в предыдущей главе мы видели, что таковыми будут именно конические сечения (эллипс, парабола, гипербола). Надо однако заметить, что в последних строках мы стали на точку зрения геометрии меры; с точки же зрения проективной геометрии мы не имеем основания для упомянутого различения: нам известно вообще *коническое сечение*, которое *определяется именно, как геометрическое место точек пересечения соответственных прямых в 2-х проективных пучках.*

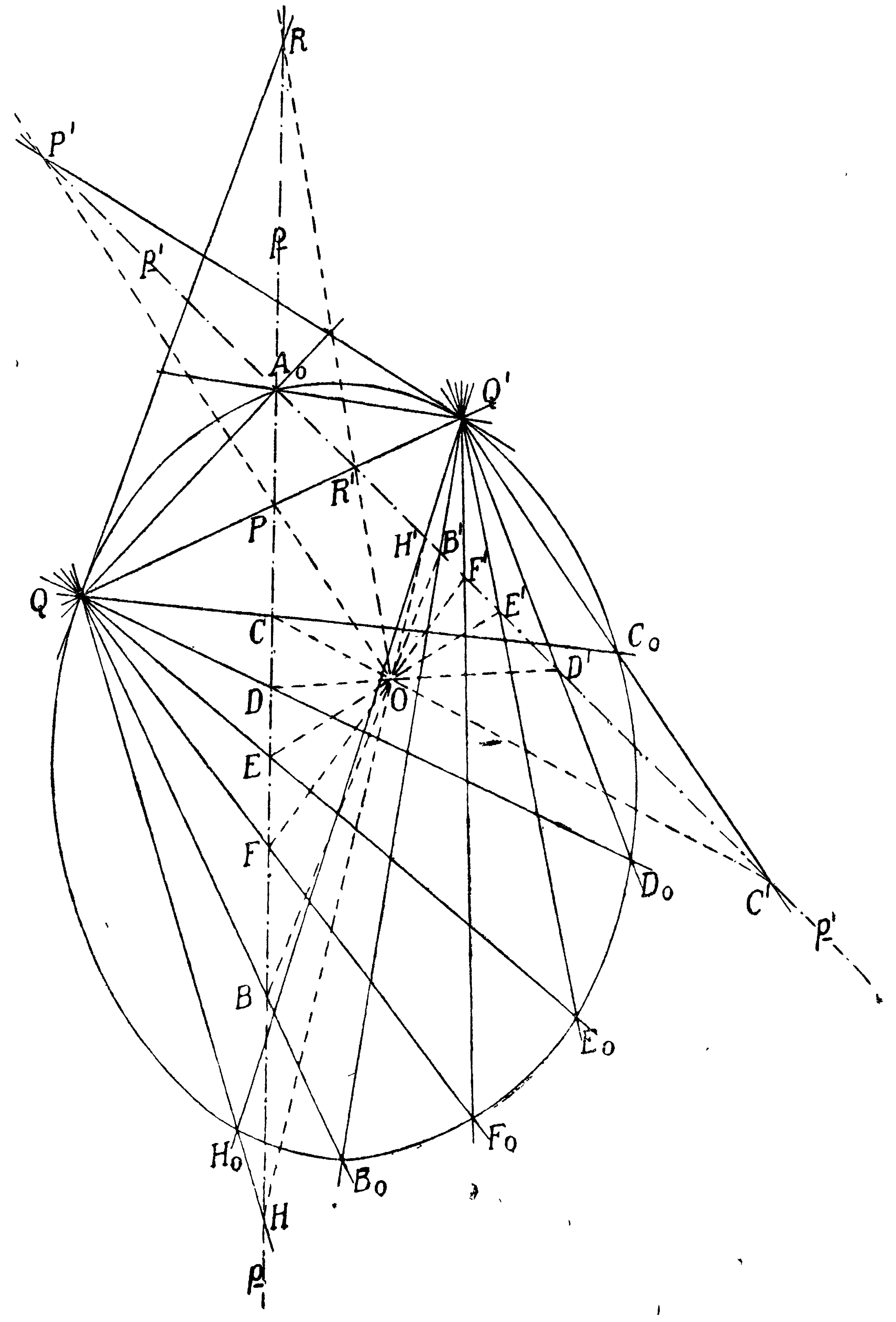
Переходя ко взаимным образам, найдем, что прямые, соединяющие соответственные точки в 2-х проективных рядах точек, образуют такую совокупность прямых, что через любую точку плоскости проходит не более 2-х прямых совокупности. Можно доказать, что такая совокупность состоит из прямых, касательных к некоторому коническому сечению. Однако в дальнейшие подробности мы

здесь входить не будем и вернемся к случаю 2-х проективных пучков, образующих коническое сечение.

Прежде всего проективное определение конического сечения позволяет с чрезвычайной простотой (с помощью одной линейки) построить сколько угодно его точек, если даны какие-либо 5 из них. Пусть нам даны точки Q, Q', A_0, B_0, C_0 (черт. 30), и требуется построить проходящее через них коническое сечение. Вопрос сводится к построению 2-х таких проективных пучков, что искомое коническое сечение будет геометрическим местом точек пересечения их соответственных прямых. С этой целью две из данных точек, напр., Q и Q', примем за центры пучков и установим между ними проективность, задав следующие 3 пары соответственных элементов:

$$QA_0 \text{ и } Q'A_0,\ QB_0 \text{ и } Q'B_0,\ QC_0 \text{ и } Q'C_0.$$

Мы знаем, что при таких условиях проективное соответствие вполне определяется; для того, чтобы каждой прямой одного пучка указать соответственную прямую в другом пучке, надо построить третий пучок, перспективный с обоими данными. Правила для выполнения требуемого построения, тоже были указаны выше: через точку A_0 пересечения соответственных прямых QA_0 и $Q'A_0$ проводим 2 произвольные прямые: во-первых — p, пересекающую прямые QB_0 и QC_0 в точках B и C, и во-вторых — p', пересекающую прямые $Q'B_0$ и $Q'C_0$ в точках B' и C'; точка O пересечения прямых BB' и CC' будет центром искомого пучка. Возьмем теперь в пучке Q какую-нибудь прямую QD (D есть точка пересечения этой прямой с p); пусть прямая DO пересекает p' в точке D'; тогда $Q'D'$ будет прямой пучка Q', соответственной для QD; эти прямые имеют общую точку D_0. Подобным же образом, беря прямые QE, QF, QH,... и строя соответ-



Черт. 30.

ственные им прямые $Q'E'$, $Q'F'$, $Q'H',\ldots$, получаем точки E_0, F_0, $H_0,\ldots$ Теперь точки

$$A_0,\ B_0,\ C_0,\ D_0,\ E_0,\ F_0,\ H_0,\ldots$$

являясь пересечениями соответственных прямых в двух проективных пучках, принадлежат некоторому коническому сечению.

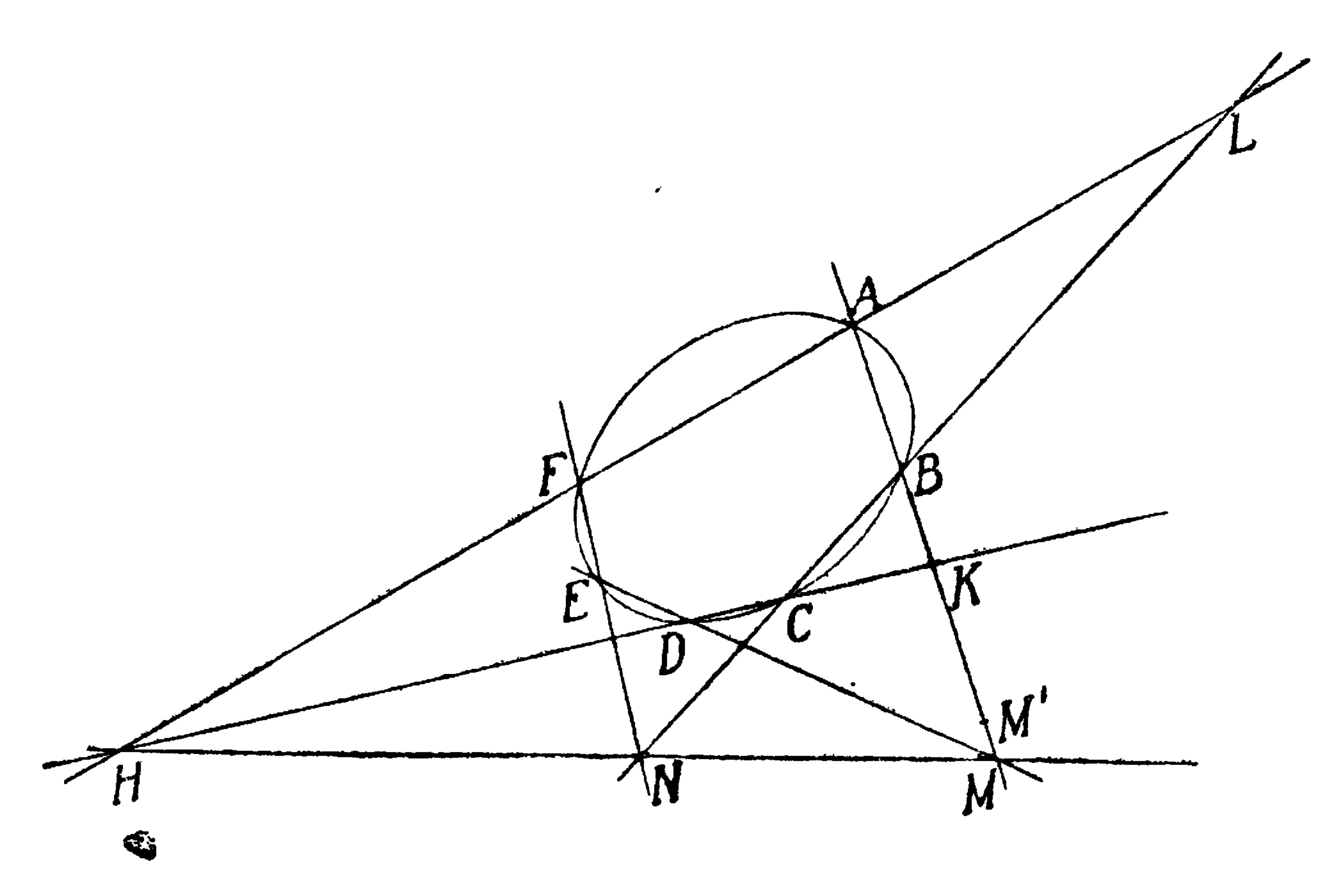
Сейчас мы докажем, что точки Q и Q' принадлежат этой же линии. С этою целью поставим следующий вопрос: прямая QQ' принадлежит обоим пучкам; какие прямые ей соответствуют? Будем сначала смотреть на QQ', как на прямую пучка Q; прямую p она пересекает в точке P; пусть OP пересекает p' в точке P'; тогда соответствующей в пучке Q' будет прямая $Q'P'$. Точно так же найдем, что прямой QQ', как элементу пучка Q', в пучке Q соответствует прямая QR. Теперь мы видим, что точка Q' служит пересечением 2-х соответственных прямых:

$$QQ' \text{ и } Q'P',$$

так что она принадлежит также нашему коническому сечению; то же самое имеет место и для точки Q. Предыдущие рассуждения приводят еще к одному интересному результату. Вообще говоря, любая прямая каждого из пучков Q и Q' пересекает определяемое ими коническое сечение в 2-х точках; это, во-первых — центр пучка, а во-вторых — точка пересечения с соответственной прямой из другого пучка; так, напр., прямая QE имеет с коническим сечением общие точки Q и E_0. Но для каждой из прямых QR и $Q'P'$, соответственных для двояко рассматриваемой прямой QQ', указанные 2 точки пересечения совпадают в одну; действительно, прямая QR проходит через Q, и точкой пересечения с соответственной прямой QQ' будет та же самая точка Q. Совершенно так же прямая $Q'P'$ пересекает коническое сечение в одной единственной

точке Q'. Но если 2 точки пересечения прямой с кривою совпадают в одну, то эта секущая становится касательной. Итак, *прямые QR и $Q'P'$ суть касательные к коническому сечению в точках Q и Q'*, и мы научились проводить касательные к кривой 2-го порядка с помощью одной линейки.

Итак, 5 точек определяют коническое сечение; ближайшее исследование показывает, что выбор 2-х точек из числа 5 данных, в качестве центров проективных пучков, не по-



Черт. 31.

влияет на получающееся в результате коническое сечение. Вообще, если любые 5 точек данной линии положить в основу вышеизложенного построения, то всегда придем к тому же самому коническому сечению.

Отсюда далее следует, что если на коническом сечении даны 4 точки B, C, A, E и если мы будем проектировать их из 2-х произвольно выбранных на кривой точек D и F (см. черт. 31), то получим 2 проективных пучка; след. имеет место равенство двойных отношений:

$$(DB\ DC\ DA\ DE) = (FB\ FC\ FA\ FE).$$

Этот последний вывод пригодится сейчас для доказательства одного из 2-х взаимных предложений, имеющих основное значение для теории конических сечений:

Теорема Паскаля.

Противоположные стороны 6-угольника, вписанного в коническое сечение, пересекаются в точках одной прямой.

Теорема Брианшона.

Прямые, соединяющие противоположные вершины 6-угольника, описанного около конического сечения, проходят через одну точку.

В силу закона взаимности, достаточно будет доказать теорему Паскаля. Пусть в некоторое коническое сечение вписан 6-угольник $ABCDEF$ (черт. 31); согласно предыдущему, имеем:

$$(DB\ DC\ DA\ DE) = (FB\ FC\ FA\ FE).$$

Пересекаем 1-й пучок прямою AB, а 2-й — прямою BC; если обозначить пересечение прямых DC и AB через K, DE и AB — через M, FE и BC — через N, FA и BC — через L, и если применить теорему Паппа, то получим новое равенство двойных отношений

$$(BK\ AM) = (BC\ LN).$$

Далее, обозначим точку пересечения прямых KC и AL (или — что̀ то же самое — CD и AF) через H; проведем прямую HN, и пусть она пересечет AB в некоторой точке M' (надо, именно, доказать совпадение M' с M). Так как ряды точек:

$$B,\ C,\ L,\ N$$

$$B,\ K,\ A,\ M'$$

перспективны с центром перспективы в H, то:

$$(BC\ LN) = (BK\ AM');$$

сопоставляя это равенство с предыдущим, имеем

$$(BK\ AM) = (BK\ AM'),$$

откуда следует, что M' должно совпасть с M.

Итак, 3 точки H, N, M лежат на одной прямой; но H есть пересечение прямых AF и CD, N — BC и EF, M — AB и DE, и теорема Паскаля доказана*).

До сих пор мы имели дело с единым коническим сечением; покажем в заключение, как мы можем различить здесь эллипсы, параболы, гиперболы; но для этого нам придется покинуть чисто-проективную точку зрения и стать на точку зрения геометрии меры.

В проективной геометрии все прямые играют одну и ту же роль, и со всякой из них коническое сечение имеет не более 2-х общих точек; если мы выделим одну из них, как бесконечно удаленную прямую плоскости, то мы, собственно говоря, станем на точку зрения геометрии меры, но предыдущее утверждение останется, конечно, в силе. Теперь вообще открываются 3 и только 3 возможности:

1) Коническое сечение не имеет с бесконечно-удаленною прямою никаких общих точек; получается эллипс, все точки которого лежат на конечном расстоянии.

2) Коническое сечение имеет только одну общую точку с бесконечно-удаленной прямой; получается парабола, состоящая из одной бесконечной ветви.

3) Коническое сечение пересекается бесконечно-удаленной прямой в 2-х точках; получается гипербола, состоящая из 2-х бесконечных ветвей.

Как узнать род кривой, заданной 5 точками? Вопрос сводится к определению числа ее бесконечно-удаленных точек; но последние определяются параллельными пря-

---

*) В упоминавшейся уже книге Цахариаса читатель может найти различные применения теоремы Паскаля.

мыми. Следовательно все дело в том, имеются ли в пучках Q и Q' (черт. 30) такие пары соответственных прямых, которые оказываются параллельными между собой, и сколько таких пар. Если из центра Q проведем прямые, параллельные прямым пучка Q', то двум параллельным прямым теперь будут соответствовать две совпадающие прямые. Таким образом, в конечном счете вопрос сводится к определению числа двойных элементов в 2-х наложенных проективных пучках.

Теперь читатель знаком с основными идеями проективной геометрии. Он мог убедиться, что последняя действительно имеет дело лишь с „графическими“ или „зрительными“ свойствами фигур, каковы: пересечение прямых, прохождение прямых через одну точку, положение точек на одной прямой, разделение 2-х пар из 4-х элементов и т. п. Все это — вопросы расположения элементов, совершенно чуждые всяким соотношениям меры. Однако, при обосновании проективной геометрии, мы нашли существенную опору в понятии о двойном отношении; а отношение 2-х отрезков служит одним из основных понятий геометрии меры. Получается таким образом некоторое несоответствие между сущностью новой отрасли геометрии и методом ее построения: геометрия положения обосновывается при помощи понятий геометрии меры; между тем ясно, что вопросы положения, по существу совершенно не связанные с понятием об измерении, можно изложить, не опираясь на это последнее. Поэтому надо признать, что метод старой французской школы нельзя считать наиболее естественным для изложения проективной геометрии; таковым можно было бы считать тот метод, который оставил бы в стороне все меровые соотношения и обосновал бы геометрию положения только на идеях положения.

Такую работу выполнила новая немецкая школа; ее родоначальник фон-Штаудт („Geometrie der Lage“, 1847) освободил проективную геометрию от зависимости от геометрии меры. В его руках и в руках его учеников (укажем здесь на Reye, написавшего книгу под тем же заглавием) проективная геометрия действительно превратилась в чистую *геометрию положения*; впоследствии даже оказалось, что, исходя из ее понятий, можно построить и основные понятия геометрии меры. Указанная реформа имеет такое важное значение в эволюции геометрической мысли, что мы считаем необходимым войти в некоторые подробности. По существу дела, здесь придется начать с геометрии полного пространства.

Основными элементами проективной геометрии в пространстве служат: *точка*, неограниченная *прямая* и неограниченная *плоскость*; обозначение точек и прямых нам уже известно, а плоскости обозначаются греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Каждый из указанных элементов можно рассматривать двояко: или действительно как элемент, т.-е. нечто единое и неделимое, или как *носителя* бесконечного множества других элементов. Таким путем мы приходим к *основным образам*, число которых теперь, конечно, увеличится.

1) Рассматривая точку, как носителя других элементов, приходим к *связке*, т.-е. к совокупности прямых и плоскостей, проходящих через данную точку; иногда приходится различать *связку прямых* и *связку плоскостей.*

2) Если к предыдущему образу присоединить условие ограничиться одной плоскостью, то получается уже известный нам *пучок прямых.*

3) Если прямую рассматривать, как совокупность точек, то снова приходим к *прямолинейному ряду точек.*

4) Если же прямая является носителем плоскостей, то получаем *пучок плоскостей*, т.-е. совокупность плоско-

стей, проходящих через данную прямую; последняя называется тогда *осью* пучка.

5) Если носителем будет плоскость, то получается *плоская система*, т.-е. совокупность всевозможных точек и прямых, лежащих в данной плоскости; иногда имеют в виду только точки или только прямые.

Сюда надо присоединить еще один образ, а именно:

6) *Пространственную систему* (или *пространство*), как совокупность всевозможных точек и плоскостей; иногда за элементы пространства берут только точки или только плоскости (прямая не рассматривается, как элемент пространства, по причинам, которые выяснятся ниже, в связи с законом взаимности).

Вот эти шесть основных образов являются первым предметом изучения для проективной геометрии.

Прежде всего эти образы делятся на три следующие группы:

I) Ряд точек, пучок прямых и пучок плоскостей суть *основные образы I-й ступени.*

II) Плоская система и связка — *основные образы II-й ступени.*

III) *Пространство — основной образ III-й ступени.*

Основанием для деления служит то обстоятельство, что первые 3 образа являются простой последовательностью элементов, между тем как, напр., плоскую систему можно определить, как последовательность, составленную из образов I ступени, а пространство — как последовательность плоских систем, которые сами уже служат образами II ступени.

Ближайшей задачей является расширение понятий об основных элементах, если только желательно и здесь, как в проективной геометрии на плоскости, получить предложения о сочетании основных образов, не терпящие никаких исключений. Несобственные или бесконечно-удален-

ные точки и прямые вводятся так же, как и раньше; только бесконечно-удаленная точка связывается теперь не с пучком, а со связкой параллельных прямых, т.-е. с совокупностью всевозможных прямых пространства, параллельных между собой. Каждой плоскости приписывается и здесь одна несобственная прямая; но *двум параллельным плоскостям приходится приписать одну и ту же бесконечно-удаленную прямую, и обратно.*

Действительно, если плоскости α и β параллельны, то для любой прямой плоскости α можно построить в плоскости β параллельную прямую; отсюда вытекает, что всякая несобственная точка одной плоскости принадлежит и другой. Обратно, если дано, что у двух плоскостей α и β имеется общая бесконечно-удаленная прямая, то, соединяя две какие-либо ее точки U и V с обыкновенными точками A и B наших плоскостей, получим в них по паре прямых $AU \parallel BU$ и $AV \parallel BV$, так что α будет параллельна β, что и требовалось доказать.

Наконец, надо будет ввести в рассуждение геометрическое место всевозможных несобственных точек пространства; так как каждая прямая имеет с искомым геометрическим местом только одну общую точку, а каждая плоскость пересекает его по прямой, то вполне целесообразно будет назвать это геометрическое место *несобственной* или *бесконечно-удаленной плоскостью.*

После таких дополнений, утверждения о том, что известное число элементов одного рода вполне определяют элемент другого рода, не будут допускать никаких исключений. Так, две плоскости всегда определяют прямую (если они не параллельны, то своим пересечением они определяют собственную прямую; если же параллельны, то — несобственную); три плоскости, которые не проходят через одну прямую, определяют точку (вообще — собственную, а если они параллельны одной и той же прямой,

то — несобственную); три точки, не лежащие на одной прямой, всегда определяют плоскость (напр.: если одна точка A — собственная, а две U и V — бесконечно-удаленные, то искомая плоскость проходит через A и параллельна прямым тех связок, которые определяют точки U и V) и т. д.

Таким образом получаются следующие основные предложения о сочетании основных элементов, которые мы сопоставим взаимно, причем в геометрии пространства этот термин понимается в том смысле, что одно предложение получается из другого посредством перестановки терминов: „точка“ и „плоскость“. Указанные предложения читаются так:

Две различные точки определяют одну и только одну совмещенную с ними прямую.

Три точки, не совмещенные с одной и той же прямой, определяют одну и только одну совмещенную с ними плоскость.

Точка и прямая, не совмещенные друг с другом, определяют одну и только одну совмещенную с ними плоскость.

Две различные плоскости определяют одну и только одну совмещенную с ними прямую.

Три плоскости, не совмещенные с одной и той же прямой, определяют одну и только одну совмещенную с ними точку.

Плоскость и прямая, не совмещенные друг с другом, определяют одну и только одну совмещенную с ними точку.

В перечисленных основных предложениях не делается никакого различия между собственными и несобственными элементами, и это существенно для проективной геометрии; тогда как особое положение некоторых элементов, в качестве „бесконечно-удаленных“, характеризует геометрию меры.

Расширенная область элементов позволяет ввести следующие *основные действия*, которые также будут описаны взаимно:

Проектированием фигуры, состоящей из точек и прямых, *из внешней точки A* называется построение всевозможных прямых, соединяющих *A* с точками данной фигуры, и всевозможных плоскостей, соединяющих *A* с ее прямыми.

Сечением фигуры, состоящей из плоскостей и прямых, *с помощью внешней плоскости α* называется построение всевозможных прямых, служащих пересечением *α* с плоскостями данной фигуры, и всевозможных точек, служащих пересечением *α* с ее прямыми.

Проектированием фигуры, состоящей из точек, *из внешней прямой a* называется построение всевозможных плоскостей, соединяющих *a* с точками данной фигуры.

Сечением фигуры, состоящей из плоскостей, *с помощью внешней прямой a* называется построение всевозможных точек пересечения *a* с плоскостями данной фигуры.

Посредством основных действий можно переходить от одного основного образа к другому:

Посредством проектирования ряда точек (совокупности точек, совмещенных с одной прямой) из внешней точки получается пучок прямых.

Посредством проектирования ряда точек из прямой, скрещивающейся*) с его носителем, получается пучок плоскостей.

Посредством сечения пучка плоскостей (совокупности плоскостей, совмещенных с одной прямой) с помощью внешней плоскости получается пучок прямых.

Посредством сечения пучка плоскостей с помощью прямой, скрещивающейся*) с его осью, получается ряд точек.

*) Две прямые называются *скрещивающимися*, если они лежат в различных плоскостях (а потому и не пересекаются).

Посредством проектирования плоской системы (совокупности точек и прямых, совмещенных с плоскостью) из внешней точки получается связка (совокупность прямых и плоскостей, совмещенных с точкой).

Посредством сечения связки (совокупности плоскостей и прямых, совмещенных с точкой) с помощью внешней плоскости получается плоская система (совокупность прямых и точек, совмещенных с плоскостью).

Указанные построения выполняются внутри пространства — основного образа III ступени; если же ограничиться плоской системой и связкой, которые являются взаимными образами II ступени, то сюда можно еще присоединить следующие построения:

Если в связке проектировать пучок прямых из прямой, принадлежащей связке, но не данному пучку, то получается пучок плоскостей.

Если в плоскости произвести сечение пучка прямых с помощью прямой, принадлежащей плоскости, но не данному пучку, то получается ряд точек.

Два разноименных основных образа, соотнесенных друг к другу с помощью одного из основных действий, называются *перспективными;* два одноименных основных образа называются перспективными в том случае, если они перспективны (в предыдущем смысле слова) с одним и тем же образом другого рода; так, например, если одну и ту же плоскую систему проектировать из двух различных точек, то получим две перспективных связки, и т. д.

Выяснив основные предложения, управляющие *сочетанием* основных элементов, мы должны перейти к вопросу о *расположении* элементов в основных образах. По сравнению с тем, что было сказано в первой половине настоящей главы, прибавить придется немного: введение

несобственных элементов делает прямую замкнутым рядом; а пучки прямых и плоскостей всегда отличались этим свойством. Таким образом здесь перед нами стоит такое предложение:

Основные образы I-й ступени суть замкнутые ряды соответствующих элементов.

Далее мы знаем, что расположение элементов в таких рядах производится с помощью понятия о *„разделении двух пар из четырех элементов“*; перечисляя исходные предпосылки проективной геометрии, необходимо подчеркнуть сохраняемость указанного отношения при основных действиях:

Если в двух перспективных образах элементам A, B, C, D соответствуют элементы α, β γ, δ, и если пара A, B разделяется парой C, D, то пара α, β разделяется парой γ, δ, и обратно.

Наконец, чтобы перечислить все предложения, лежащие в основе проективной геометрии, надо упомянуть еще об *аксиоме непрерывности*, которая утверждает, что основные образы I-й ступени суть *непрерывные* ряды соответствующих элементов. Здесь мы ограничимся этой не совсем определенной формулировкой; известные представления о непрерывности у читателя несомненно имеются, входить же в подробный математический анализ этого понятия — слишком отвлекло бы нас в сторону *).

Таким образом мы перечислили все основные предложения проективной геометрии, которые могут быть названы ее аксиомами; последние делятся на 3 группы: *аксиомы сочетания, аксиомы расположения* и *аксиома непрерывности.*

Вглядываясь в них, мы приходим к одному из важнейших предложений проективной геометрии в пространстве, а именно — к *закону взаимности:*

---

*) В последней главе мы надеемся войти в некоторые подробности по вопросу о непрерывности геометрических образов.

Во всякой теореме проективной геометрии, не нарушая ее истинности, можно переставить термины: „точка“ — „плоскость“, сохраняя в неприкосновенности термин „прямая“ и делая другие обусловленные этими изменения.

Справедливость предложения вытекает из того, что такую замену терминов можно сделать во всех основных предложениях сочетания, расположения и непрерывности, из которых логически развивается вся проективная геометрия.

Укажем наиболее важные изменения в терминах, сопутствующие главной замене, указанной выше; так:

„Ряд точек“ заменяется на „пучок плоскостей“, и обратно; „пучок прямых“ заменяется на „пучок прямых“; „плоская система“ заменяется на „связку“, и обратно; „проектирование“ заменяется на „сечение“ и т. д.

Как мы уже знаем, на ряду со взаимными теоремами существуют взаимные образы и построения; приведем некоторые примеры.

Полный четырехугольник, как фигура, образованная 4 точками некоторой плоскости и 6 прямыми, попарно их содиняющим.

Полный четырехгранный угол, как фигура, образованная 4 плоскостями некоторой связки и 6 прямыми, служащими их пересечениями попарно.

Полный четырехгранник, как фигура, образованная 4 прямыми некоторой плоскости и 6 точками, служащими их пересечениями попарно.

Полный четырехреберник, как фигура, образованная 4 прямыми некоторой связки и 6 плоскостями, попарно их соединяющими.

Если даны 2 скрещивающиеся прямые, то через каждую внешнюю точку проходит одна и только одна

Если даны 2 скрещивающиеся прямые, то в каждой внешней плоскости имеется одна и только одна прямая,

прямая, пересекающая обе данные.

Действительно, искомая прямая служит пересечением двух плоскостей, соединяющих данные прямые с выбранной точкой.

пересекающая обе данные.

Действительно, искомая прямая соединяет две точки пересечения данных прямых с выбранной плоскостью.

и т. д.

Помимо изложенного общего закона взаимности, имеется еще 2 частных, относящихся к основным образам II-й ступени.

Возьмем какое-нибудь предложение, касающееся плоской системы, но, конечно, такое, доказательство которого покоится исключительно на трех группах основных предложений, перечисленных выше. Данное предложение утверждает нечто о точках и прямых, лежащих в одной плоскости, причем это утверждение может касаться лишь „зрительных“ свойств. Будем проектировать нашу плоскую систему из внешней точки; при этом точки перейдут в прямые, а прямые — в плоскости некоторой связки; но наше утверждение не потеряет своей силы, так как совмещенность элементов, разделение двух пар и т. п. „зрительные“ свойства сохраняются при основных действиях. Таким образом получается то же самое утверждение, но уже относящееся к иным элементам, а именно — к прямым и плоскостям некоторой связки. Для этого последнего предложения построим взаимное (на основании общего закона взаимности); тогда получаем новое утверждение, того же характера, что и первоначально данное, но имеющее дело с прямыми и точками некоторой плоскости. Сопоставляя исходное предложение с тем, которое получилось в результате рассуждения, приходим к *1-му частному закону взаимности* (в плоскости).

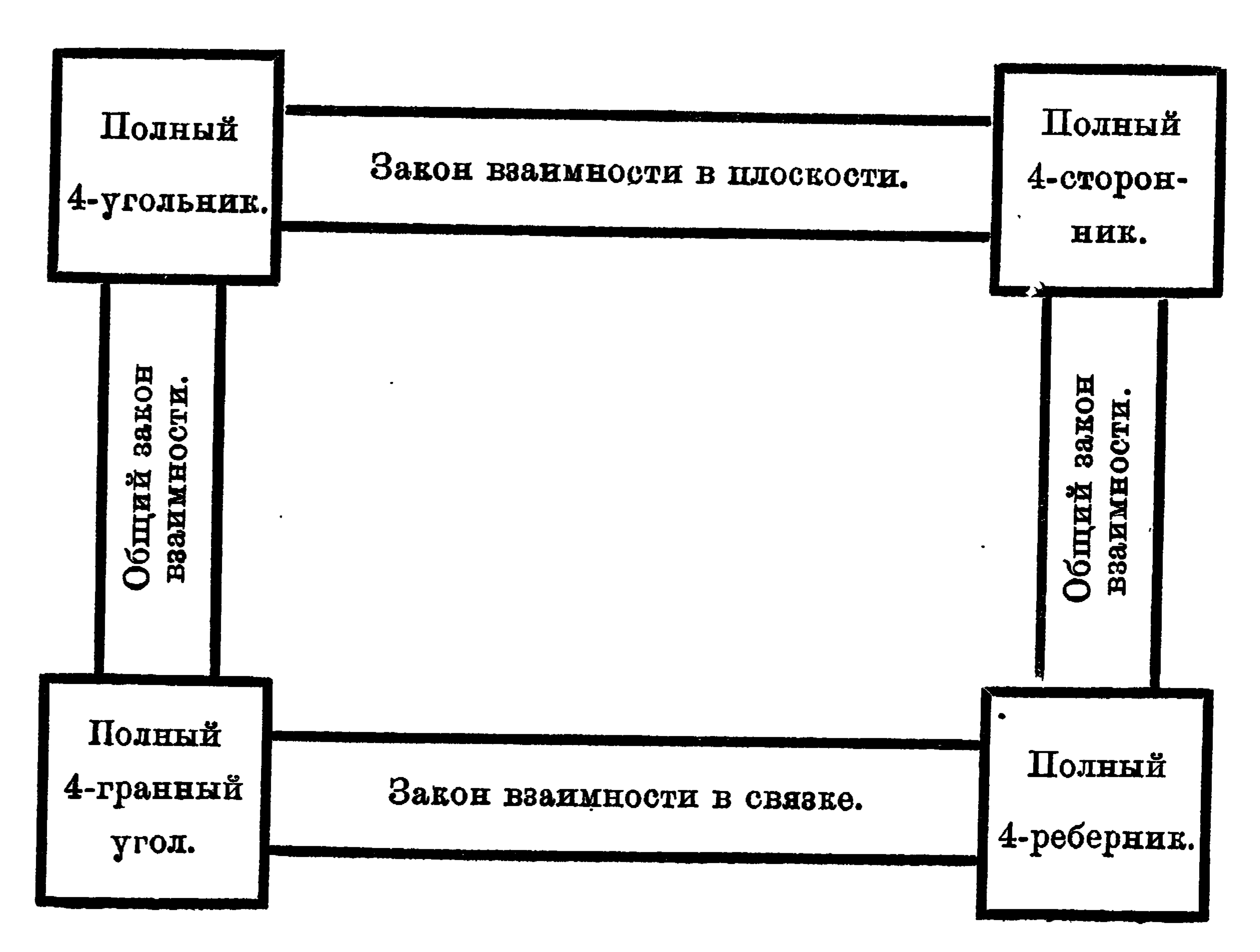
Всякое предложение проективной геометрии, относящееся

к плоской системе, сохраняет свою силу при перестановке терминов: „точка“—„прямая“ и при соответствующем изменении остальных.

Только-что доказанная теорема сама является одной из теорем проективной геометрии, а потому на нее распространяется действие общего закона взаимности. Применяя последний, выводим *2-й частный закон взаимности* (в связке):

Всякое предложение проективной геометрии, относящееся к связке, сохраняет свою силу при перестановке терминов: „плоскость“ — „прямая“ и при соответствующем изменении остальных.

Таким образом каждое предложение, касающееся основного образа II-й ступени, является в четверном виде; другими словами, из каждого такого предложения можно непосредственно вывести три новых предложения. Не входя в подробности, приведем в следующей схеме пример взаимных фигур:



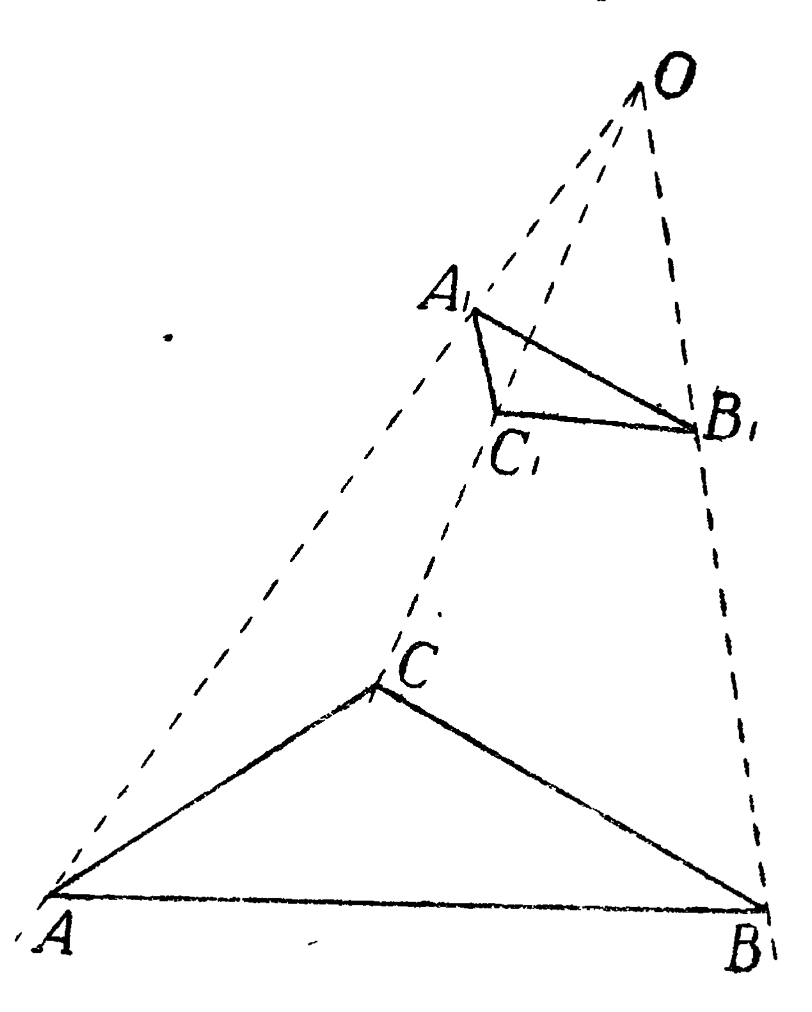
Для обоснования проективной геометрии по способу Штаудта большое значение получает *теорема Дезарга* о перспективных Δ-ах, которую надо здесь доказать, основываясь лишь на зрительных свойствах геометрических образов. Подчеркнем наиболее важный для нас случай указанного предложения, когда оно имеет дело с плоской системой; тогда перед нами имеются 2 предложения, взаимные (в плоскости) друг с другом и в то же время друг другу обратные. Заметим предварительно, что взаимные в плоскости фигуры, „треугольник“ и „трехсторонник“ являются по существу одной и той же фигурой, состоящей из 3-х точек, не лежащих на одной прямой и попарно соединенных прямыми. Две такие фигуры одного рода будем называть соотнесенными, если между их вершинами и сторонами установлено одно-однозначное соответствие. Теперь теорему Дезарга можно высказать следующим образом:

Если в 2-х соотнесенных треугольниках одной и той же плоскости прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку, то точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой.

Если в 2-х соотнесенных трехсторонниках одной и той же плоскости точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку.

В силу закона взаимности в плоскости, достаточно будет доказать одно из этих предложений (напр., левое). Теорема Дезарга имеет место не только для треугольников, лежащих в одной плоскости, и с этого более общего случая придется начать доказательство. Пусть нам даны два Δ-ка ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 32), которые лежат в различных плоскостях, и притом так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят все через точку O; пусть плоскости

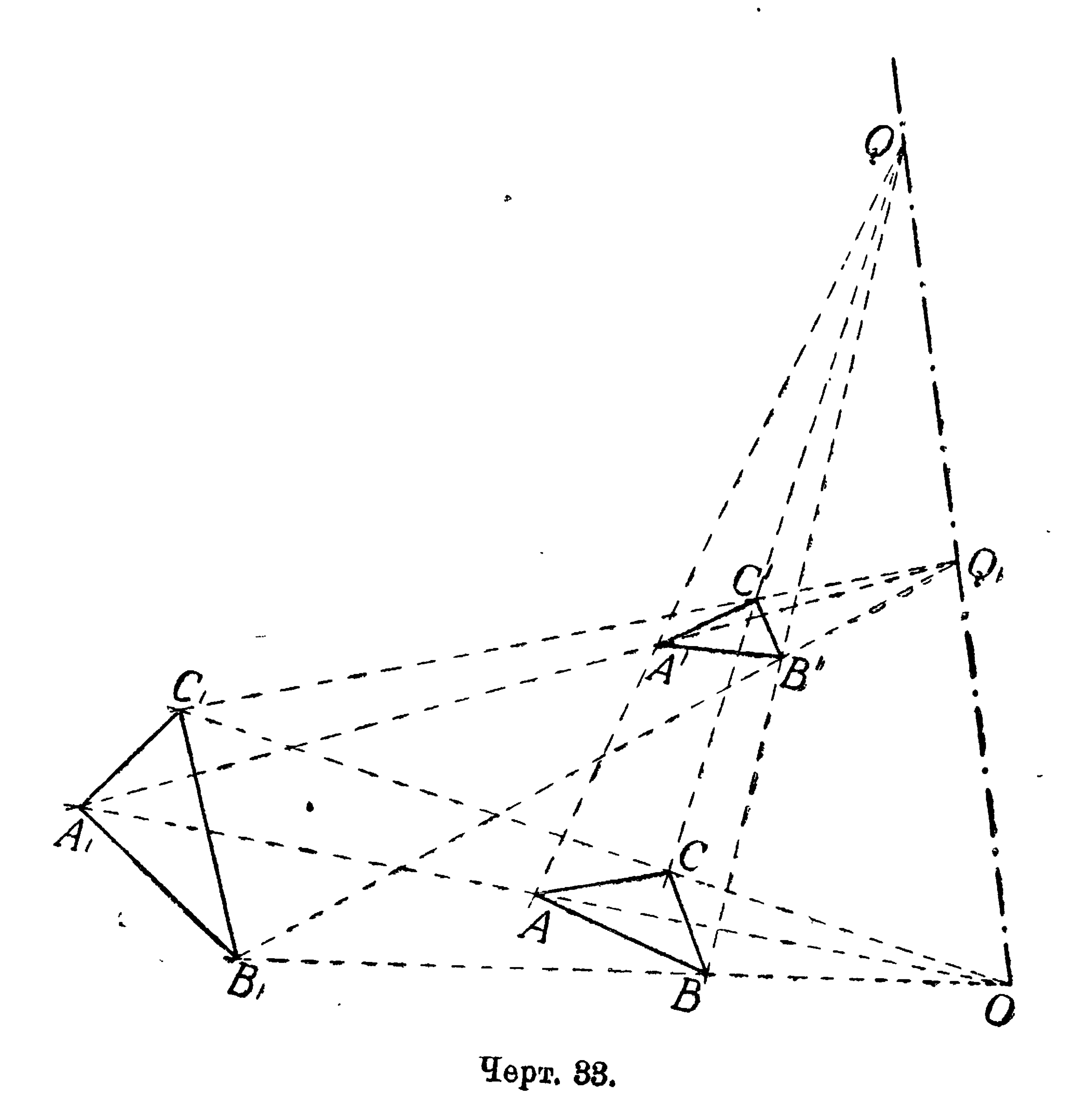
ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются по прямой k (эта прямая не указана на чертеже, чтобы не усложнять его). Очевидно, прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости, определяемой сходящимися прямыми AA_1 и BB_1; а потому AB и A_1B_1 пересекаются в некоторой точке C_0, которая, находясь в плоскостях обоих Δ-ов, должна лежать на линии k их пересечения. Точно так же докажем, что прямые BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в точках A_0 и B_0 прямой k. Следовательно все 3 точки пересечения лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.



Черт. 32.

Возьмем теперь два Δ-ка ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 33), расположенных уже в одной плоскости, причем прямые AA_1, BB_1, CC_1 попрежнему сходятся в одной точке O. Возьмем точку Q вне общей плоскости и будем из нее проектировать ΔABC; на прямой OQ отметим еще точку Q_1 и будем проектировать из нее $\Delta A_1B_1C_1$. Прямые QA и Q_1A_1 лежат в одной плоскости, определяемой прямыми OA и OQ; а потому они пересекаются в некоторой точке A'. Точно так же прямые QB и Q_1B_1, QC и Q_1C_1 пересекаются соответственно в точках B' и C'. Таким образом получается 3-й $\Delta A'B'C'$, служащий общим перспективным изображением для обоих данных Δ-ов и лежащий, конечно, в другой плоскости; прямую пересечения плоскостей ABC и $A'B'C'$ обозначим через k. На основании предыдущего случая, прямые AB и $A'B'$ пересекаются в не-

которой точке прямой k; то же самое надо сказать и о прямых A_1B_1 и $A'B'$. Но прямая $A'B'$, общая для обеих пар, пересекает k лишь в одной точке, и через эту точку, следовательно, должны проходить прямые AB и A_1B_1.



Черт. 33.

Продолжая рассуждать подобным же образом, докажем, что 3 пары прямых:

$$AB \text{ и } A_1B_1, \quad BC \text{ и } B_1C_1, \quad CA \text{ и } C_1A_1$$

пересекаются по точкам одной и той же прямой, откуда и следует теорема Дезарга.

Владея теоремой Дезарга, мы сможем сейчас вывести два предложения, лежащие в основе определения гармонических систем; эти предложения также взаимны друг с другом, но уже не в плоскости, а в пространстве (в силу общего закона взаимности):

Если у 2-х полных 4-угольников, лежащих в одной плоскости, пять пар соответственных сторон пересекаются по точкам одной прямой (не проходящей ни через одну из вершин), то и 6-я пара сторон пересекается в точке этой же прямой.

Если у 2-х полных 4-гранных углов, принадлежащих одной связке, пять пар соответственных ребер определяют плоскости, проходящие через одну прямую (не лежащую ни в одной из граней), то и 6-я пара ребер определяет плоскость, проходящую через ту же самую прямую.

На основании общего закона взаимности, достаточно доказать только одно из этих предложений (напр., левое). Пусть нам даны 2 полных 4-угольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (черт. 34), лежащих в одной плоскости, и притом так, что пять пар соответственных сторон:

$$AB \text{ и } A_1B_1,\quad AC \text{ и } A_1C_1,\quad AD \text{ и } A_1D_1,\quad BC \text{ и } B_1C_1,\quad BD \text{ и } B_1D_1$$

пересекаются в точках:

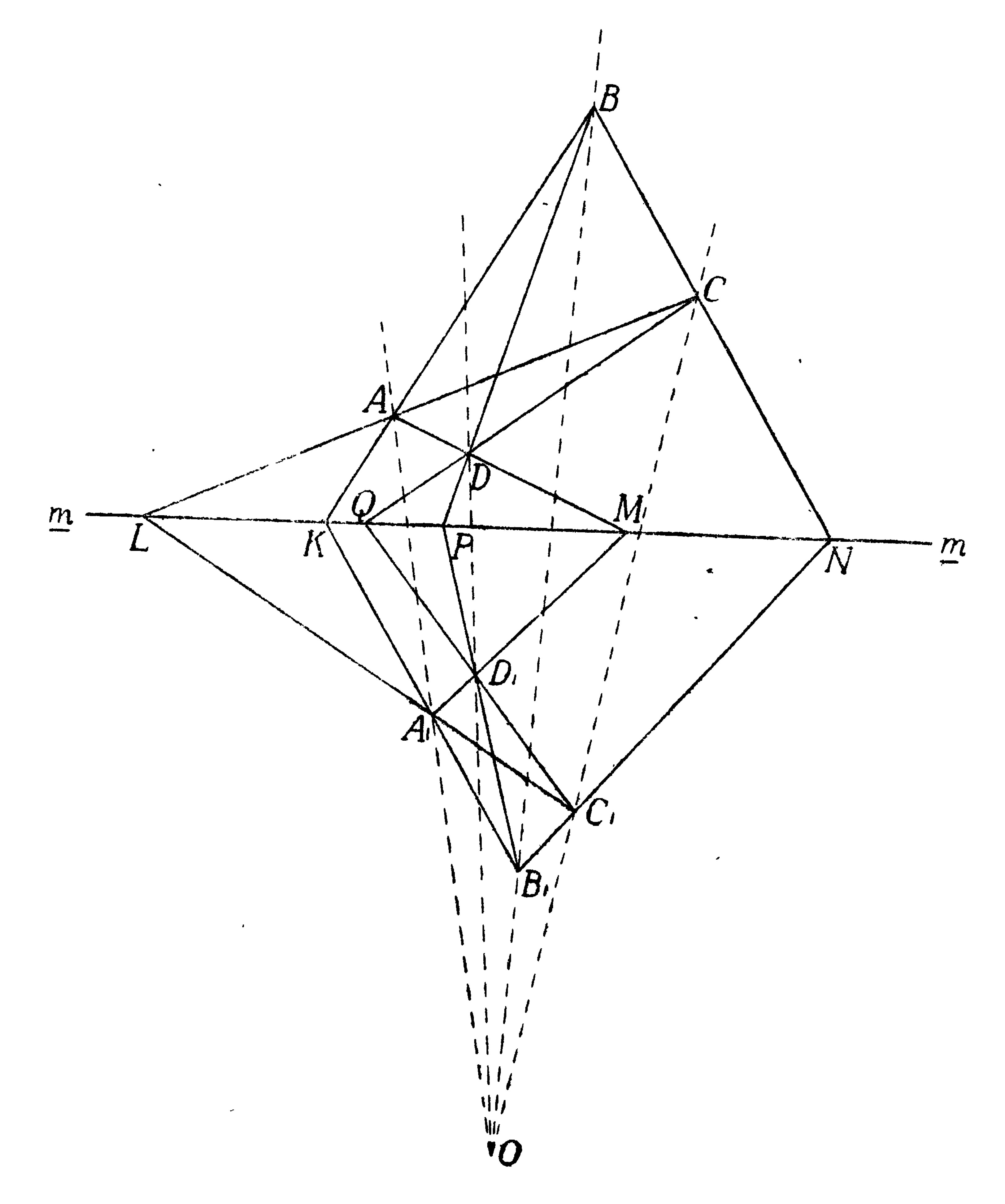
$$K,\quad L,\quad M,\quad N,\quad P$$

некоторой прямой m. Рассмотрим Δ-ки ABC и $A_1B_1C_1$; на основании теоремы Дезарга (правая часть), прямые:

$$AA_1,\quad BB_1,\quad CC_1$$

пересекаются в точке O. Применяя ту же теорему к Δ-ам ABD и $A_1B_1D_1$, найдем, что прямые:

$$AA_1,\quad BB_1,\quad DD_1$$



Черт. 34.

тоже пересекаются в одной точке. Но так как прямые AA_1 и BB_1 встречаются в обоих случаях, то это будет та же самая точка O. Следовательно все 4 прямые:

$$AA_1, \quad BB_1, \quad CC_1, \quad DD_1$$

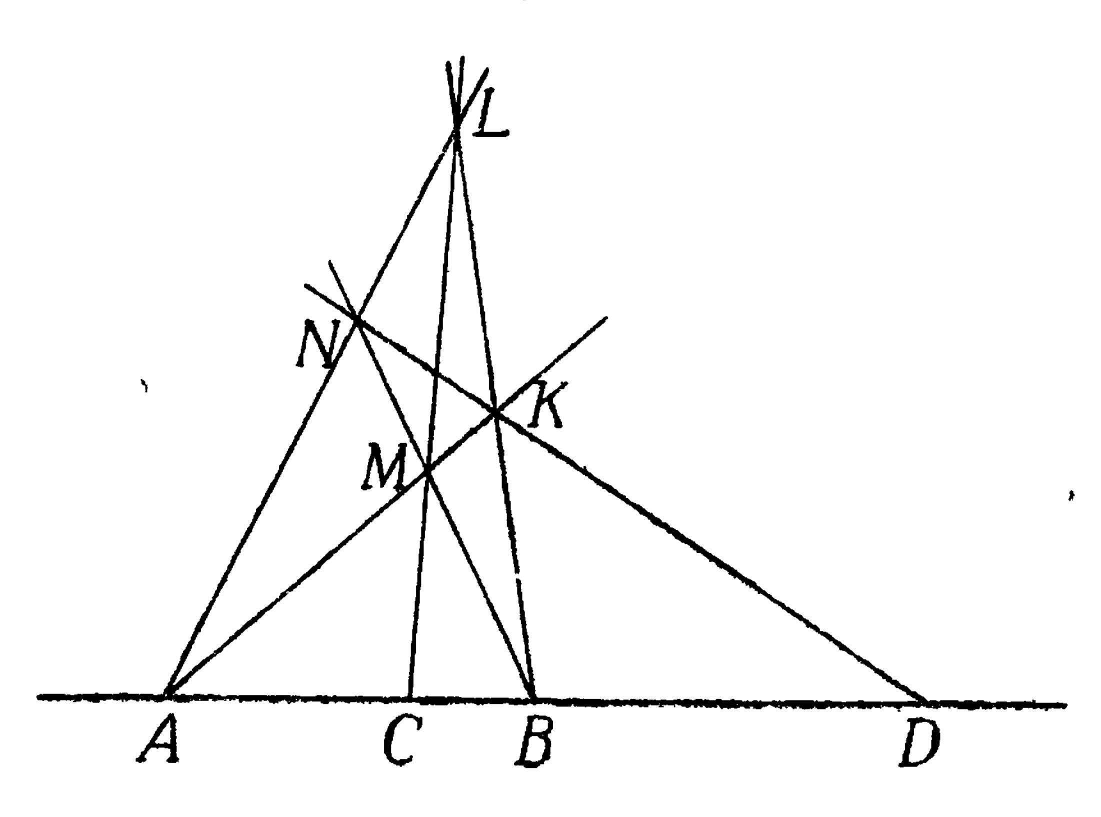
проходят через точку O. Остановимся, наконец, на Δ-ах ACD и $A_1C_1D_1$; на основании теоремы Дезарга (левая часть), прямые:

$$AC \text{ и } A_1C_1, \quad AD \text{ и } A_1D_1, \quad CD \text{ и } C_1D_1$$

пересекаются в точках одной прямой. Но две первые пары пересекаются в точках L и M, определяющих прямую m; следовательно и 6-я пара соответственных сторон CD и C_1D_1 пересекается в точке Q, лежащей на той же прямой, что и требовалось доказать.

Замечание. Когда эта теорема будет применяться в дальнейшем, то точки M и N, равно как точки K и Q, будут совпадать друг с другом; такое положение точек, конечно, по существу ничего в теореме не изменит.

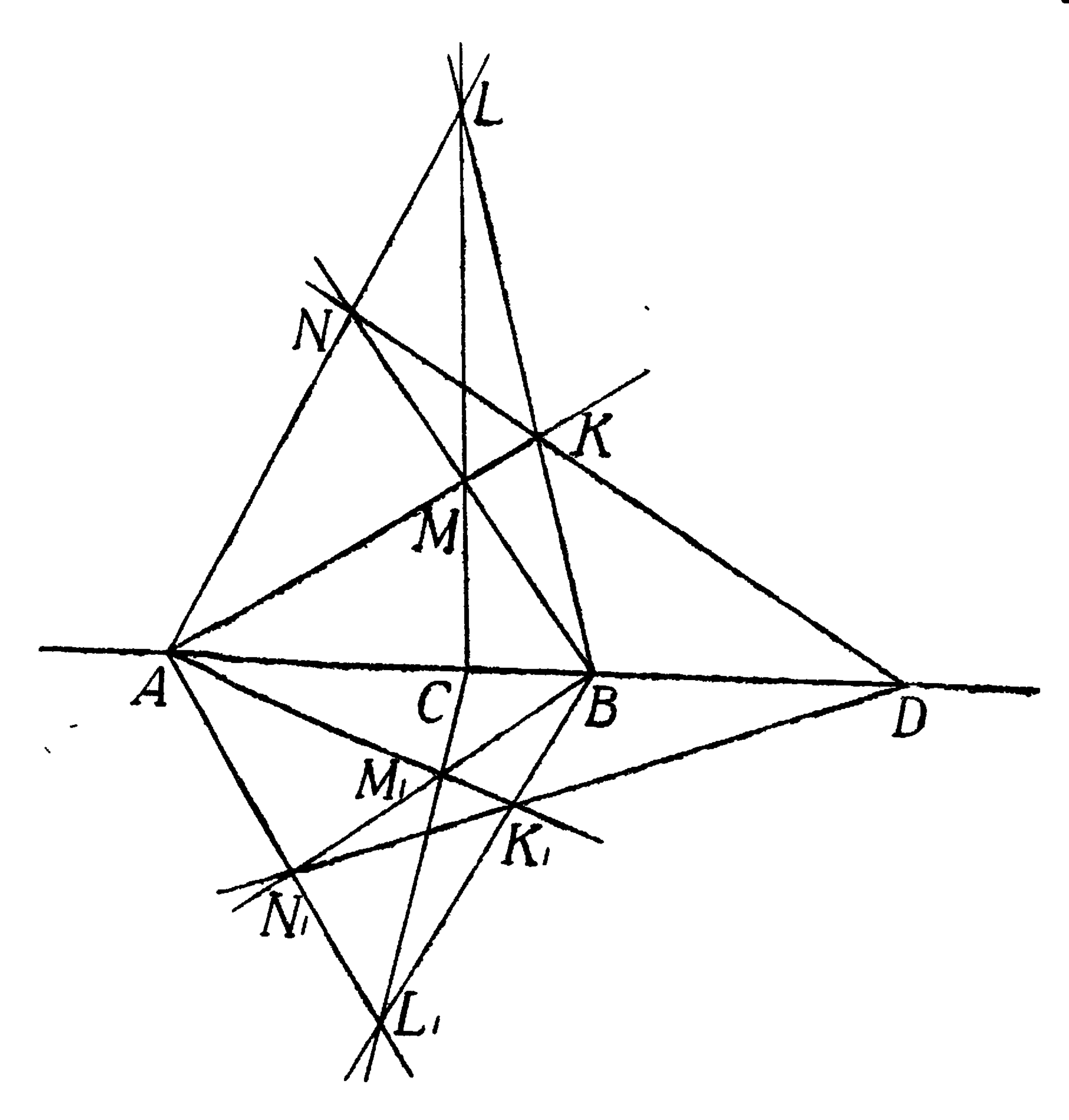
Предыдущая теорема дает нам одно замечательное построение, выполняемое (как и все вообще построения



Черт. 35.

проективной геометрии) с помощью одной линейки. Пусть на некоторой прямой заданы 3 точки A, B, C; в какой-нибудь плоскости, проходящей через данную прямую, построим такой полный 4-угольник, чтобы 2 его противо-

положные стороны сходились в точке A, две другие противоположные стороны—в точке B, а 5-я сторона проходила через точку C. Построение выполняется так (черт. 35): через каждую из данных точек проводим по произвольной прямой, и пусть эти 3 прямые AK, BL, CM образуют ΔKLM; затем соединяем A с L и проводим BM до пересечения с AL в точке N. Таким образом получается



Черт. 36.

полный 4-угольник $KLMN$, имеющий требуемое положение по отношению к точкам A, B, C; его 6-я сторона NK пересекает данную прямую в некоторой вполне определенной точке D. Замечательно, что *положение точки D определяется лишь данными точками и тем порядком, в котором мы их рассматриваем;* но оно совершенно не зависит от выбора вспомогательной фигуры.

Действительно, если, на ряду с полным 4-угольником $KLMN$, построим в любой плоскости, содержащей прямую ABC, другой полный 4-угольник $K_1L_1M_1N_1$, расположенный относительно данных точек так же, как и первый, то придем к той же самой точке D. На черт. 36 указано соответствующее построение; у наших 4-угольников 5 пар соответственных сторон:

MK и M_1K_1, NL и N_1L_1, KL и K_1L_1, MN и M_1N_1, LM и L_1M_1

пересекаются в точках:

$$A,\quad B,\quad C,$$

лежащих на одной прямой. Следовательно, по ранее доказанной теореме, и 6-я пара сторон:

$$NK \quad \text{и} \quad N_1K_1$$

должна пересечься в точке этой же прямой; но NK уже имеет с AB общую точку D, и через эту точку должна пройти прямая N_1K_1, что и требовалось доказать.

Итак, несмотря на то, что при построении с помощью полного 4-угольника проводятся три произвольные прямые (в данной плоскости), в результате построения всегда получается одна и та же точка D. Но если мы изменим порядок точек A, B, C, т.-е. заставим, напр., по две стороны 4-угольника проходить через B и C, а через A проведем только одну, то, конечно, мы придем в результате построения к иной точке.

Что касается расположения 4-х точек A, B, C, D, то нетрудно прийти к выводу, что пара A, B разделяется парой C, D (само доказательство мы опустим ввиду того, что утверждение достаточно ясно, и читатель согласится с ним без труда)

Все только-что изложенное дает нам повод для введения одного понятия, имеющего основное значение для пути

Штаудта: если 4 точки прямой A, B, C, D обладают тем свойством, что в A и B сходятся по паре противоположных сторон полного 4-угольника, а в C и D — по одной его стороне, то говорят, что *пара A, B гармонически разделяется парой C, D*; совокупность всех 4-х точек наз. *гармонической группой.*

Доказанная несколько выше теорема может быть высказана теперь в следующем виде: *если на прямой даны 3 точки A, B, C, то на этой прямой всегда существует одна и только одна такая точка D, что пара A и B гармонически разделяется парой C и D.* Эта „4-я гармоническая точка“ находится построением с помощью полного 4-угольника.

Отвлечемся на минуту в сторону и сопоставим здесь методы старой и новой школы. В первом случае, на основании понятий геометрии меры, вводится двойное отношение; его частный случай дает нам гармонические точки, а такие точки мы, между прочим, находим в фигуре, образуемой полным 4-угольником. Во втором же случае эта фигура кладется в основу исследования, и гармоническими называются точки, имеющие особое расположение по отношению к какому-либо полному 4-угольнику; при этом понятия и предложения геометрии меры остаются совершенно в стороне.

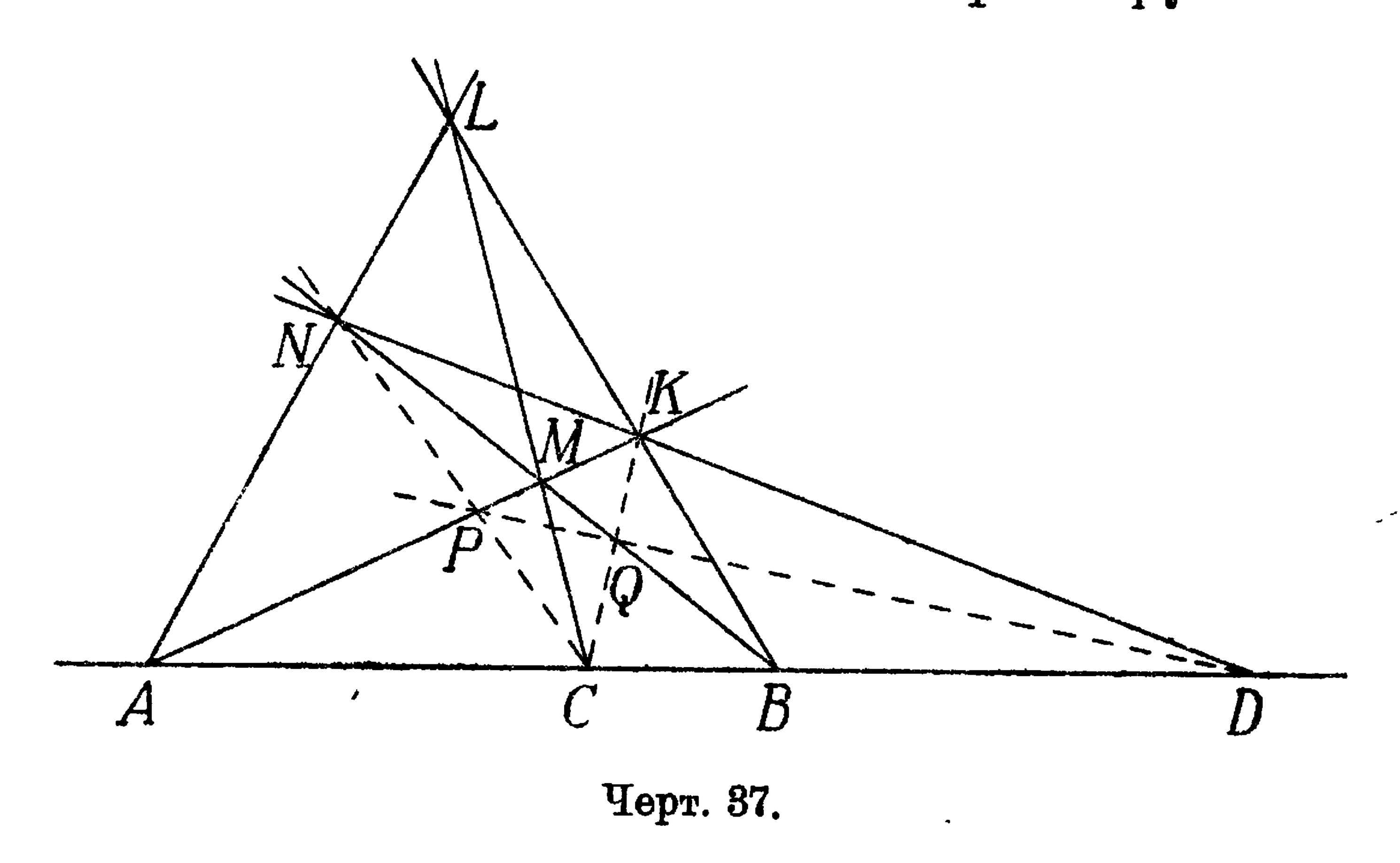
Возвращаемся к прерванному исследованию. Из определения гармонической группы явствует, что как точки 1-й пары, так и точки 2-й пары входят в определение совершенно симметрично, откуда следует возможность переставлять точки в каждой паре. Следовательно, если A, B гармонически разделяются C, D, то это же самое можно утверждать и о парах:

$$B, A \text{ и } C, D; \quad A, B \text{ и } D, C; \quad B, A \text{ и } D, C.$$

Но первая и вторая пары входят в определение различным образом, так что непосредственно не является

очевидной возможность менять их порядок. Однако мы сейчас докажем, что *если пара A, B гармонически разделяется парой C, D, то и наоборот: пара C, D гармонически разделяется парой A, B.*

Пусть, именно, гармоническая группа A, B, C, D определяется обычным образом с помощью полного 4-угольника $KLMN$ (черт. 37). Из точки C проектируем точки



Черт. 37.

K и N на прямые BN и AK в точки Q и P. Остановимся на Δ-ах KLN и QMP; так как прямые:

$$KQ, \quad LM, \quad NP$$

сходятся в одной точке C, то по теореме Дезарга (левая часть) три пары прямых:

$$KL \text{ и } QM, \quad LN \text{ и } MP, \quad NK \text{ и } PQ$$

пересекаются по точкам одной прямой. Но первые 2 пары пересекаются по точкам B и A, определяющим данную прямую; NK пересекает эту прямую в точке D, а потому и PQ должна пройти через D. Теперь мы построили полный 4-угольник $KNPQ$ таким образом, что 2 его противо-

положные стороны KQ и NP проходят через C, две другие NK и PQ — через D, а из 2-х остальных KP проходит через A и NQ — через B. Согласно определению гармонической группы, можно, следовательно, сказать, что пара C, D гармонически разделяется парой A, B, откуда и следует теорема.

Подобно тому, как была определена гармоническая группа из 4-х точек прямолинейного ряда, можно ввести гармоническую группу из 4-х плоскостей некоторого пучка; для этого надо только перевести все вышеизложенное на другой язык с помощью общего закона взаимности. Таким образом приходим к определению: плоскости α, β гармонически разделяются плоскостями γ, δ, если в какой-либо связке с центром на оси пучка имеется такой полный 4-гранный угол, что в плоскостях α и β лежат по два его противоположных ребра, а в плоскостях γ и δ — по одному.

Все доказанное для гармонической группы точек, в силу закона взаимности, переносится и на гармоническую группу плоскостей.

Остается определить гармонические элементы в пучке прямых; прежде всего докажем следующие 2 взаимных теоремы:

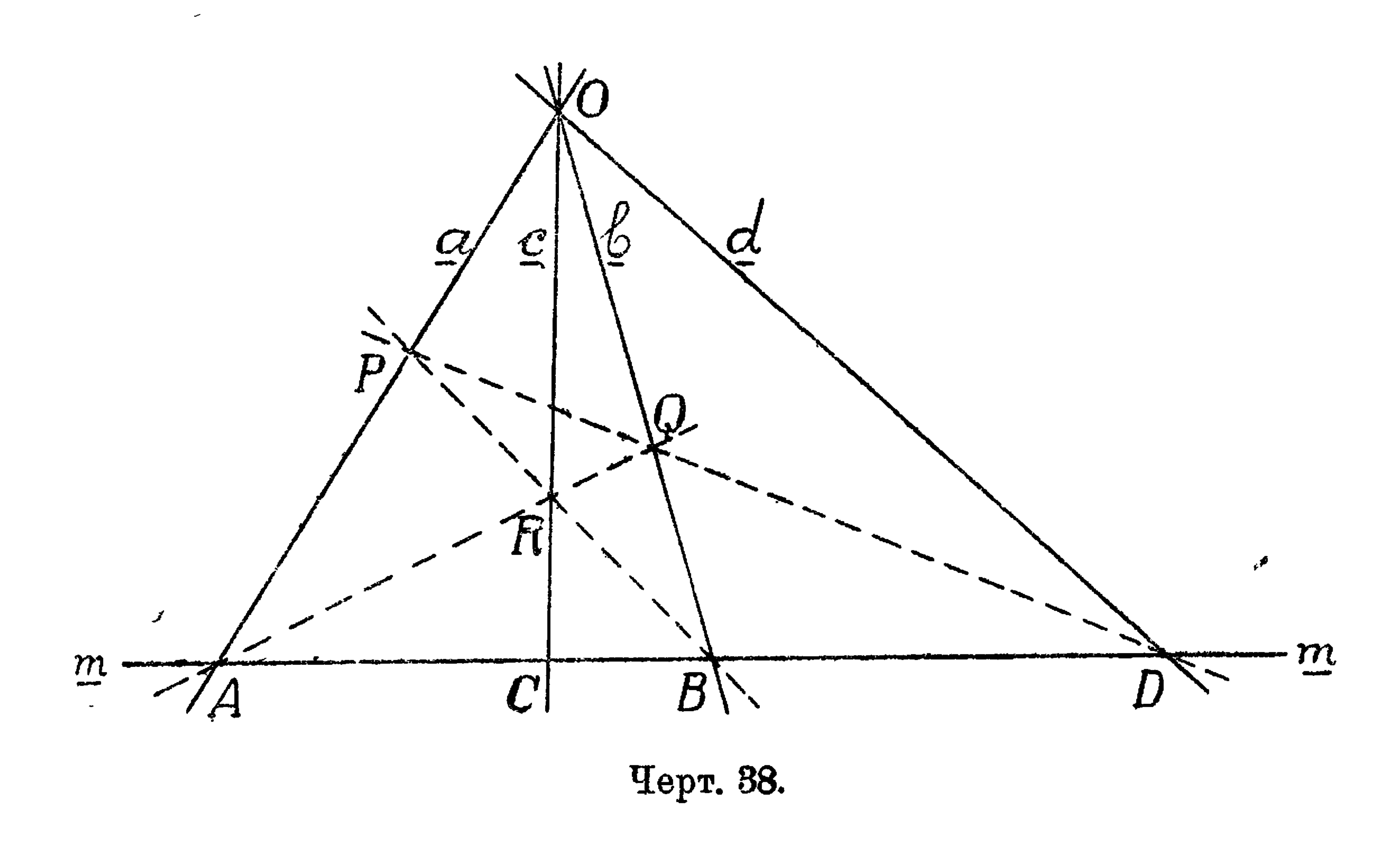
Если гармоническую группу точек проектировать из прямой, скрещивающейся с ее носителем, то получается гармоническая группа плоскостей.

Если гармоническую группу плоскостей пересечь прямою, скрещивающейся с ее носителем, то получается гармоническая группа точек.

В силу общего закона взаимности, достаточно доказать только одну из этих теорем (напр., левую).

Пусть на прямой m дана гармоническая группа точек A, B, C, D и после проектирования получился пучок плоскостей α, β, γ, δ. Пересечем последний какой-нибудь

плоскостью, проходящей через прямую m; в сечении получим пучок прямых a, b, c, d, перспективный с данным рядом точек (черт. 38). Из точки A проведем какую-нибудь прямую, пересекающую b и c в точках Q и R; затем строим прямую BR и отмечаем точку P ее пересечения с a. Так как пара A, B гармонически разделяется парой



Черт. 38.

C, D и точки A, B, C расположены требуемым образом по отношению к полному 4-угольнику $OPRQ$, то его сторона PQ должна пройти через точку D. Теперь рассмотрим полный 4-сторонник, образуемый прямыми AQ, BP, PQ и m; две его противоположные вершины A и P лежат на a, две другие B и Q — на b, а из 2-х остальных R лежит на c и D — на d. Поэтому, если мы станем проектировать нашу фигуру из какой-нибудь точки, лежащей на оси пучка плоскостей, то прямые a, b, c, d снова дадут нам плоскости α, β, γ, δ; а упомянутый полный 4-сторонник перейдет в полный 4-гранный угол, ребра которого будут расположены в указанных плоскостях именно так,

как это требуется определением гармонической группы. Итак, плоскости α, β гармонически разделяются плоскостями γ, δ, что и требовалось доказать.

Основываясь на изложенном, можно для пучков прямых доказать следующие теоремы:

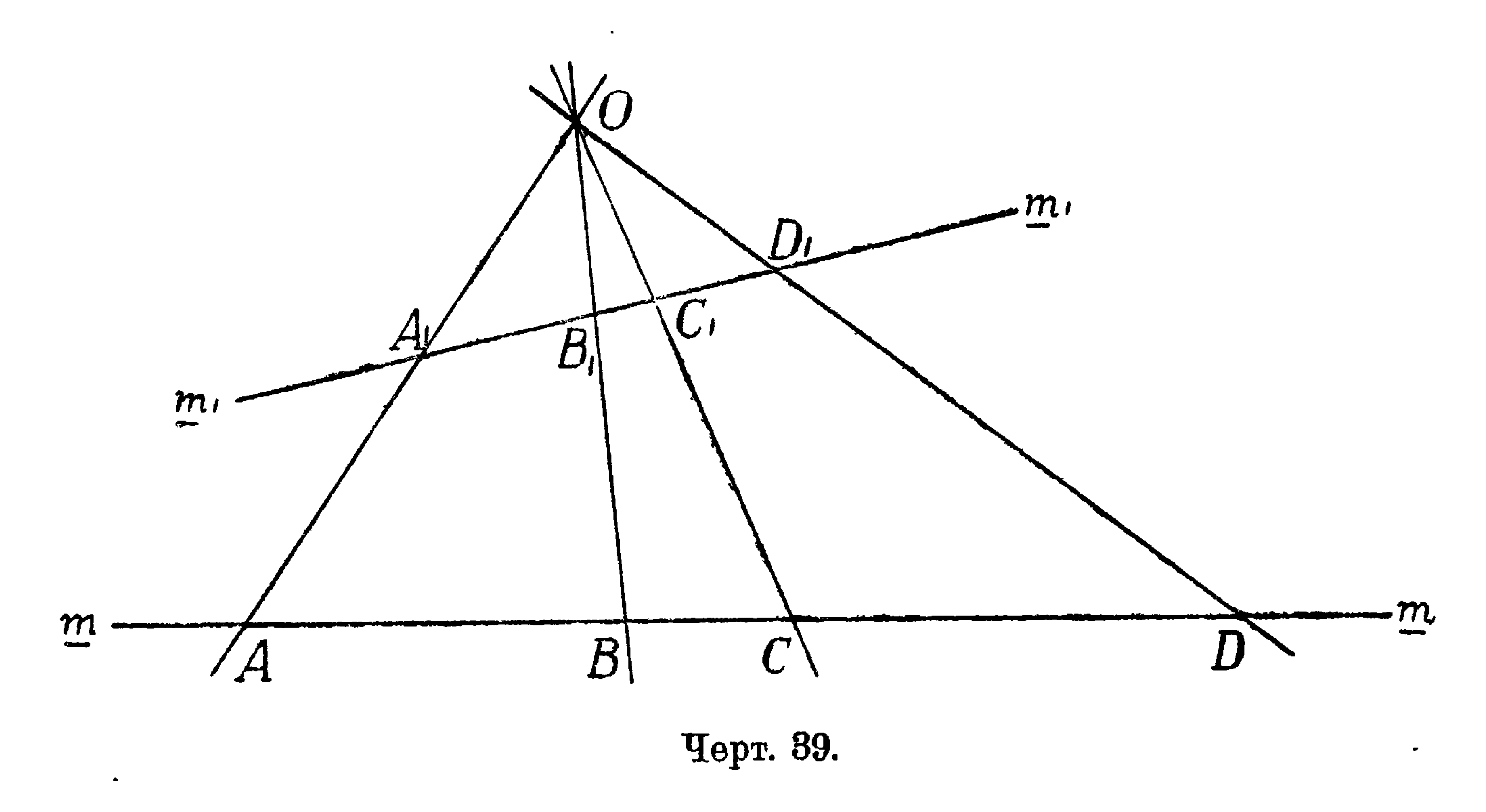
Если 4 прямые a, b, c, d пучка O проектируют какую-нибудь гармоническую группу точек $ABCD$, то, пересекая эти прямые любой прямой, принадлежащей плоскости пучка, получим гармоническую группу точек, а проектируя их из любой прямой, принадлежащей той же связке O, получим гармоническую группу плоскостей.

Если 4 прямые a, b, c, d пучка O служат сечением гармонической группы плоскостей $\alpha\beta\gamma\delta$, то, проектируя эти прямые из любой прямой, принадлежащей связке O, получим гармоническую группу плоскостей, а пересекая их любой прямой, принадлежащей плоскости пучка, получим гармоническую группу точек.

Докажем предложение, стоящее слева.

Пусть прямые a, b, c, d пересекают некоторую прямую m по точкам A, B, C, D, образующим гармоническую группу (черт. 39). Проведем любую прямую p связки O, не лежащую, однако, в плоскости пучка (прямая p на чертеже не указана), и будем проектировать из этой прямой точки A, B, C, D; на основании предыдущей теоремы (левая часть), получается гармоническая группа плоскостей α, β, γ, δ. Но, проектируя указанные точки, построенные сейчас плоскости проектируют и прямые a, b, c, d, откуда следует 2-я часть предложения. Пусть теперь какая-нибудь прямая m_1 пересекает данные прямые по точкам A_1, B_1, C_1, D_1; в то же самое время она пересекает по этим точкам гармоническую группу плоскостей $\alpha\beta\gamma\delta$; а потому сами эти точки образуют гармоническую группу (предыдущая теорема, правая часть). Заключительные части обеих взаимных теорем показывают, что одна из них

создает условия, необходимые для применения другой. Таким образом проектирование гармонической группы точек и сечение гармонической группы плоскостей — эти свойства у пучка прямых всегда связаны друг с другом; такие группы из 4-х прямых называются *гармоническими*.



Черт. 39.

Легко видеть, что свойства гармонических элементов переносятся и сюда.

Собирая все последние определения и теоремы, получаем такое предложение:

При сечении и проектировании гармонические группы элементов преобразуются в гармонические же.

Другими словами, свойство 4-х элементов образовать гармоническую группу является *инвариантным* по отношению к основным действиям проективной геометрии. Естественное обобщение приводит отсюда к теореме: *Если один основной образ I-й ступени получается из другого с помощью конечного числа основных действий, то 4-м гармоническим элементам одного образа всегда соответствуют 4 гармонические же элементы другого.*

Теперь мы подошли к введению понятия о проективности:

Два основных образа I-й ступени называются *проективными*, если они таким способом соотнесены друг другу, что каждой гармонической группе из 4-х элементов одного образа в другом соответствует также гармоническая группа.

Из самого определения, в связи с предыдущей теоремой, вытекает утверждение:

Два основных образа I-й ступени, соотнесенные друг с другом при помощи конечного числа основных действий, проективны между собой.

Обратного утверждения мы сейчас сделать не можем; для этого надо сначала доказать *основное предложение проективной геометрии:*

Если в двух наложенных проективных образах I-й ступени имеются три двойных элемента, то все их элементы — двойные; другими словами, наши образы тожественны.

Мы приведем доказательство самого Штаудта в переработке проф. Андреева*). Останавливаясь, для определенности, на прямолинейном ряде точек, допустим, что на некоторой прямой наложены 2 проективных ряда точек с 3 двойными элементами. Выбрав один из них A, представим себе, что здесь совпадают две соответственные точки M и M', пробегающие данные ряды. Пусть точка M выходит из A и *непрерывно* пробегает 1-й ряд; тогда соответственная ей точка M' тоже выходит из A и тоже *непрерывно* пробегает 2-й ряд (в каком направлении — безразлично). Возможны лишь 2 случая:

1) точки M и M' все время остаются совмещенными друг с другом, и тогда теорема очевидна;

---

*) Андреев. „Об изложении начал проективной геометрии" (Харьков, 1881), стр. 19—20.

2) точки M и M' расходятся в некоторой точке K (которая может совпадать и с A); но так как имеются еще двойные элементы, то они должны снова совпасть в некоторой двойной точке L. Пусть L есть первая точка, в которой совпадают, после расхождения, наши переменные точки M и M', так что внутри одного из отрезков KL не имеется уже двойных точек (надо помнить, что проективная прямая двумя своими точками делится на 2 отрезка). Но вне этого отрезка имеется по крайней мере еще одна двойная точка P; пусть точка Q будет гармонически сопряженной с P относительно точек K и L. Так как для точек K, L, P существует единственная 4-я гармоническая, и так как в проективных образах соответствуют друг другу точки, образующие гармонические группы, то точка Q должна соответствовать самой себе, т.-е. она является двойным элементом в данной проективности. Но мы знаем, что точки K, L разделяются точками P, Q; следовательно точка Q принадлежит тому отрезку KL, который не содержит точки P. Таким образом мы получили двойную точку внутри такого отрезка, который двойных элементов не содержит; ясно, что второе допущение приводит к противоречию, а потому его надо отбросить.

Остается только первое допущение, и теорема — доказана.

При доказательстве основной теоремы мы опирались на понятие о *непрерывном движении* и на те свойства, которые обычно вкладываются в указанное понятие. Среди геометров возник спор, насколько изложенное доказательство является строгим с чисто-геометрической точки зрения *). Разрешением спора служит вывод, что имеющееся у нас представление о непрерывности геометрических

*) Подробности можно найти в упомянутой выше брошюре проф. Андреева.

образов необходимо проанализировать и его математическую сущность формулировать в виде одной из аксиом геометрии; последняя уже позволит изложить интересующее нас доказательство строго-логически. Однако о сущности геометрического понятия о непрерывности мы предпочитаем поговорить в другой связи (см. ниже); а здесь удовольствуемся приведенным наглядным доказательством.

Владея основной теоремой, можно применить по существу те же самые рассуждения, что̀ и в 1-й части настоящей главы, и получить доказательство следующей решающей теоремы:

Если два основных образа I-й ступени проективны друг с другом, то один получается из другого с помощью конечного числа основных действий.

Теорема эта показывает, что понятие о проективности, введенное Штаудтом, совпадает с тем, которое мы изучали по методу старой школы; перед проективной геометрией открывается теперь свободный путь для дальнейшего развития. Здесь мы поставим, наконец, точку и отошлем читателя для более глубокого знакомства с проективной геометрией к следующим книгам (кроме тех, которые были уже названы):

Назимов. „Введение в высшую геометрию“ (Казань, 1893).

Вебер-Вельштейн. „Основания геометрии“ (Одесса, Mathesis).

Enriques. „Vorlesungen über projective Geometrie“ (Teubner, 1903).

Подведем в двух словах итог тем новым идеям, которыми обогатила геометрию ее новая отрасль, созданная в XIX веке. Прежде всего, французская школа, введя

отрицательные отрезки и несобственные элементы и опираясь на понятие об ангармоническом отношении (заимствованном из геометрии меры), создала для геометрического исследования общие методы, которых не хватало древним; попутно было выдвинуто понятие об одно-однозначном соответствии, которое теперь имеет такое важное значение в геометрии. Эти методы показали свою силу в создании учения о проективности и чисто-геометрической („синтетической") теории конических сечений. Однако все то принципиально новое, что несла с собой проективная геометрия, было раскрыто в работах немецкой школы. Давно уже было замечено, что новая геометрия имеет дело по существу с так называемыми „зрительными" свойствами геометрических образов — в отличие от старой, направлявшей свое внимание почти исключительно на свойства меры; но только Штаудту удалось обосновать проективную геометрию действительно на „зрительных" свойствах, тщательно отделив их от меровых свойств. Отныне новая геометрия сложилась в чистую *геометрию положения*, и вот в этом выделении идеи положения и в сосредоточении внимания на ней заключалась весьма ценная точка зрения.

Указанное разграничение свойств положения от свойств меры требовало анализа самых основ нашей науки; а закон взаимности, который в школе Штаудта получает априорное и совершенно общее доказательство, ставил важный вопрос о методе геометрии: как это может быть, что сказанное о точке верно и для плоскости, хотя эти элементы резко отличаются друг от друга в нашем пространственном представлении? Такие вопросы подготовляли современные исследования об аксиомах и методе геометрии.

Нельзя, наконец, не напомнить о тех изящных построениях с помощью одной линейки, которые по Штаудту

лежат в основе определения гармонических групп и позволяют совершенно другой дорогой подойти к прежнему понятию о проективности.

V. Построение неевклидовых систем.

Во II главе мы видели, что V-й постулат Евклида, лежащий в основе учения о параллельных прямых, занимает особое положение среди других постулатов и аксиом „Начал“. Во-первых, по своему строению, он значительно сложнее других предпосылок; он сложнее даже 3-го предложения, доказательству которого Евклид уделил немало внимания. Во-вторых, сам автор отвел V-му постулату особое место, доказав первые 28 предложений без его помощи и введя его только тогда, когда уже не мог итти дальше без его помощи. Все это еще в древности обратило внимание геометров на V-й постулат. Сюда присоединились, кроме того, причины другого характера. Дело в том, что исследование параллельных прямых предъявляет к нашему пространственному воображению несравненно бо́льшие требования, чем другие основные вопросы элементарной геометрии: параллельные прямые *нигде* не пересекаются, и представить себе такие прямые не так-то легко. Действительно, обозреть сколько-нибудь отчетливо в своем представлении мы можем лишь весьма ограниченную часть пространства: представить дом со всеми его частями гораздо труднее, чем свой кабинет, а отчетливое представление целого города заключает в себе для многих непреодолимые трудности; представление же параллельных прямых требует неограниченного пространства. В силу изложенного V-й постулат является менее очевидным, чем, напр., I-й, утверждающий, что две точки можно соединить отрезком. В настоящее время непосредственная очевидность не считается неотъемлемой принад-

лежностью аксиом. Конечно, без особой нужды никто не станет уклоняться от этого требования, но вполне возможно, что иная теорема окажется проще иной аксиомы: аксиома заключает в себе подчас целую теорию в зачаточном виде, а теорема относится к такому-то частному факту. Не так думали прежние геометры; а потому они плохо мирились с более сложным содержанием V-го постулата. Отсюда с глубокой древности возникло стремление *доказать* V-й постулат, т.-е. перевести его из разряда недоказуемых предпосылок в разряд доказуемых теорем. Попытки эти не прекращались в течение 2000 лет с лишком; да и теперь иногда можно натолкнуться на такую попытку, хотя в XIX столетии вопрос получил окончательное решение, но — не такое, на которое надеялись прежние геометры.

Первое условие для того, чтобы вопрос получил правильное решение, состоит в том, что он должен быть поставлен во вполне определенные рамки; в математике это соображение особенно важно. Так, каждый, вероятно, слыхал о „трисекции угла“, т.-е. о задаче разделить данный произвольный угол на 3 равные части. Задача получит определенную постановку, если мы укажем на те средства или приборы, которыми мы вправе располагать при искомом построении. Обыкновенно разрешается пользоваться только линейкой и циркулем; при таких условиях задача невозможна (это строго доказано). Если же присоединить сюда еще какие-нибудь другие приборы, то задача может стать разрешимой. Подобно этому обстоит дело и с интересующим нас вопросом о доказательстве V-го постулата. Правильная постановка его заключается в том, чтобы искать доказательство, опираясь лишь на остальные аксиомы и постулаты (за вычетом V-го) и не вводя никаких новых предпосылок; если же последнее условие нарушить, то задачу весьма легко решить, но такое реше-

ние не будет соответствовать тому, что вкладывается в требование *доказать V-й постулат.*

Такая постановка вопроса представляла известные трудности для геометров, занимавшихся учением о параллелях до XIX столетия; эти трудности имеют значение и для нас с вами, читатель, ибо в этой книге мы идем путем исторической последовательности. Дело заключается в том, что для того, чтобы вопрос о доказательстве V-го постулата получил полную четкость, необходимо было знать полный список аксиом геометрии; выключив отсюда V-й постулат и опираясь только на остальные предпосылки, а также и на вытекающие из них теоремы, мы поставили бы исследование во вполне определенные рамки. Но вопрос о полном списке аксиом геометрии получил свое решение лишь к концу XIX столетия; до того же времени только некоторые аксиомы указывались открыто, а остальные в неопределенной форме и в неопределенном количестве вводились скрытым образом в течении самого рассуждения (подобный случай нам встретился при доказательстве 1-го предложения „Начал“). Таким образом вопрос о доказательстве V-го постулата терял вполне определенную постановку, и автор исследования подвергался серьезной опасности: в течении подчас длинного и утомительного рассуждения, незаметно для самого автора, могло проскользнуть предложение, по существу равносильное V-му постулату, — тем более, что таким же точно путем вводился целый ряд аксиом, которыми автор имел полное право пользоваться. Так и случалось не раз, и перечень попыток доказать V-й постулат пестрит такими кажущимися доказательствами, впадающими в ошибку, известную в логике под именем „заколдованного круга“; ниже мы увидим один известный пример тому*).

*) В последующем будут даны только самые краткие исторические сведения; подробности читатель найдет в книгах: Engel und

Однако нельзя сказать, чтобы эти исследования были совершенно бесполезны: выяснение их ошибок сопровождалось выяснением скрытых дотоле предпосылок геометрии, а это несомненно подготовляло правильное решение вопроса в XIX веке. Наконец, надо отметить, что, на ряду с кажущимися доказательствами, были работы другого рода, где авторы предлагали заменить постулат Евклида другим, имевшим перед ним, по их мнению, какие-либо преимущества. Такая точка зрения вполне законна, ибо мы установили (в гл. II), что в основу геометрии приходится положить несколько предложений в качестве аксиом, но какие именно предложения принять без доказательства — это не было предрешено раз навсегда. Возможно, что один автор, в качестве аксиомы, возьмет предложение *A* и докажет с его помощью теорему *B*, а другой сочтет более целесообразным поступить наоборот; принять без доказательства *B* и попытаться с его помощью установить предложение *A*. Из попыток такого рода укажем на доклад известного английского математика Валлиса (1663 г.), в котором он предлагает доказательство V-го постулата, введя в качестве новой аксиомы предложение: „для любой фигуры всегда существует подобная фигура произвольной величины". Ниже мы увидим, что это утверждение действительно равносильно постулату Евклида.

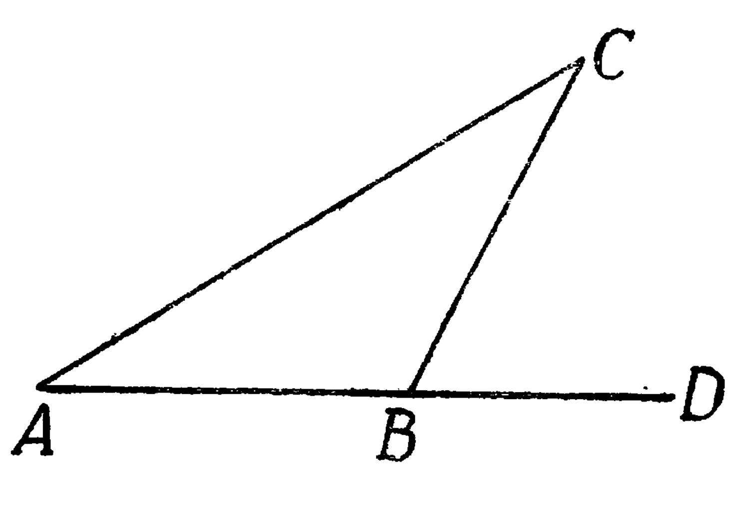
В середине XVIII века в интересующем нас вопросе был сделан некоторый шаг вперед. В 1733 г. появилась работа ученого итальянского иезуита Саккери, а в 1766 г. была написана (опубликована же 20 лет спустя) книга немецкого философа и математика Ламберта; обе работы были посвящены учению о параллельных прямых. Точка

Stäckel. „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss" (Teubner, 1895). Каган. „Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии" (Одесса, 1907). Бонола. „Неевклидова геометрия", пер. А. Р. Кулишера (СПб. 1910).

зрения обоих геометров по существу заключается в следующем. Представим себе, что мы владеем всем тем материалом геометрии, который обосновывается независимо от V-го постулата; затем мы строим 4-угольник с 3 прямыми углами и спрашиваем о величине 4-го угла. Конечно, в известной нам доселе геометрии, носящей имя *евклидовой*, этот угол должен также равняться прямому, но это утверждение есть следствие теоремы о сумме углов треугольника, которая доказывается с помощью свойств параллельных прямых; а потому сейчас мы на нее ссылаться не можем. В таком случае можно сделать 3 и только 3 „гипотезы“: 4-й угол будет острым, он будет прямым и он будет тупым. Средняя „гипотеза“ соответствует известной нам геометрии, и если бы удалось устранить две остальные, то отсюда оказалось бы возможным вывести постулат Евклида. Саккери довольно легко справляется с гипотезой тупого угла; но для того, чтобы привести к противоречию гипотезу острого угла, ему понадобилось вывести из нее целый ряд следствий; да и то противоречие, полученное Саккери, потом оказалось кажущимся. Ламберт в общем шел тем же путем, но выказал себя более глубоким мыслителем. До конца вопроса не решили ни тот ни другой из названных геометров; главная заслуга их заключается в том, что в их работах впервые были даны теоремы из области иных систем геометрии, отличающихся от евклидовой; поэтому их называют „предтечами неевклидовой геометрии“. Надо прибавить, что труды Саккери и Ламберта по достоинству были оценены значительно позже, а на творцов неевклидовой геометрии они влияния не оказали.

К концу XVIII века умами стала овладевать философия Канта, а известно, какое важное значение для обоснования критической философии получило рассмотрение метода геометрии. Вполне естественно, что в эту эпоху

усилился интерес к основам геометрии, и по причинам, указанным выше, интерес этот опять-таки сосредоточился на теории параллелей. Указанный подъем интереса не оказался бесплодным: приближалось время, которому суждено было решить 2000-летнюю задачу. Но здесь мы сделаем остановку и познакомимся с исследованиями известного французского математика Лежандра; в противоположность предыдущим, его идеи получили широкое распространение *). Главный интерес заключается в теоремах о сумме углов Δ-ка; впоследствии оказалось, что все это было еще у Саккери, а потому указанные предложения носят название *теорем Саккери-Лежандра.* Прежде чем входить в существо дела, напомним читателю кое-что из области элементарной геометрии.



Черт. 40.

Читатель, вероятно, помнит теорему о внешнем угле Δ-ка: *внешний угол Δ-ка больше каждого из внутренних, с ним не смежных.* Так, на черт. 40 имеем:

$$\angle CBD > \angle CAB \text{ и } \angle CBD > \angle BCA.$$

Это предолжение доказано в I-й книге „Начал" под № 16, так что оно относится к числу тех, которые доказываются без помощи V-го постулата. Отсюда нетрудно вывести такое следствие: *сумма 2-х углов Δ-ка всегда меньше 2-х прямых углов.* Так, прибавляя к обеим частям неравенства:

$$\angle CAB < \angle CBD$$

*) Лежандр написал учебник геометрии („Eléments de Géométrie", 1794); в 1823 г. вышло уже 12-е издание этого учебника.

по углу ABC, получаем:

$$\angle CAB + \angle ABC < \angle CBD + \angle ABC;$$

но справа стоит теперь сумма 2-х смежных углов, которая равна $2d$, т.-е. 2-м прямым углам.

Итак:

$\angle CAB + \angle ABC < 2d$, что и требовалось доказать.

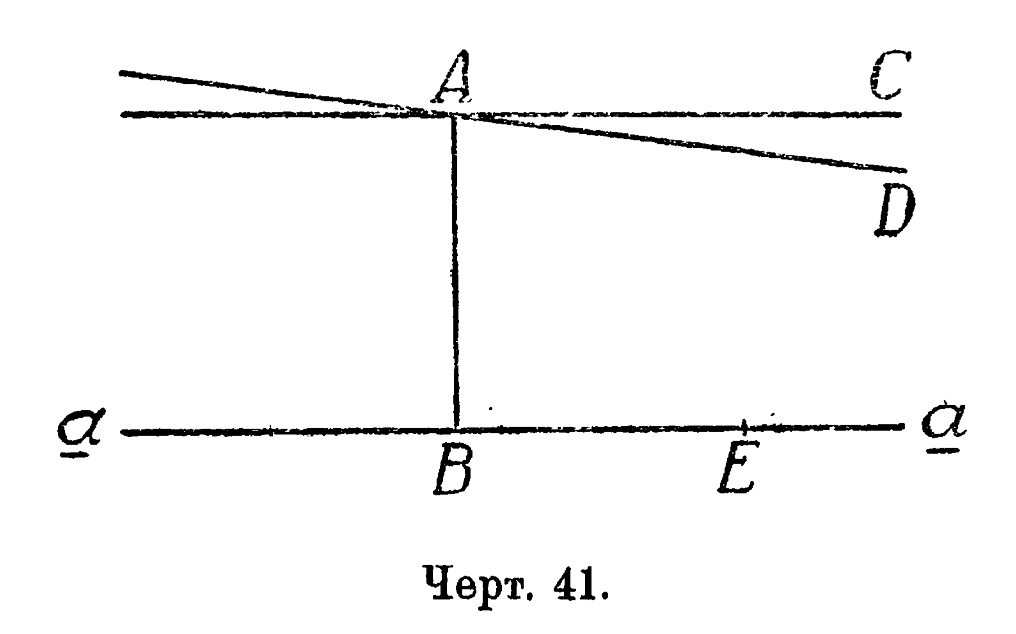
Однако в рассматриваемом вопросе интерес сосредоточивается на сумме всех 3-х углов Δ-ка; к этому мы сейчас и перейдем, но предварительно укажем два предложения, равносильные постулату Евклида.

Утверждение, что 2 предложения X и Y равносильны друг другу, имеет тот смысл, что одно из них влечет за собой другое; при этом, однако, надо иметь в виду следующее обстоятельство. Когда мы из X выводим Y (или обратно), то обыкновенно нам приходится пользоваться еще, в качестве основания для рассуждения, и другими предложениями P, Q, R,...; таким образом равносильность X и Y имеет до известной степени условный характер, связанный с допущением других предложений. Поэтому в таких случаях говорят, что „X и Y равносильны по отношению к системе P, Q, R,...“. Так, когда мы будем доказывать равносильность V-го постулата с каким-либо другим предложением, то будем основываться на всех остальных аксиомах геометрии и на вытекающих из них теоремах; следовательно указанная равносильность будет иметь место *по отношению ко всем остальным аксиомам геометрии.*

В настоящее время в основу учения о параллельных прямых кладется обычно иное утверждение, и вот мы начнем с теоремы:

Постулат Евклида равносилен предложению: из точки, данной вне прямой, можно провести к этой прямой только одну параллельную.

Пусть нам дан V-й постулат, и мы присоединяем его к остальным аксиомам геометрии; пусть, далее, дана прямая a и вне ее точка A (черт. 41). Через эту точку можно провести одну прямую, параллельную a, и для этого нет надобности ссылаться на V-й постулат. Действительно, из точки A опускаем перпендикуляр AB на прямую a и



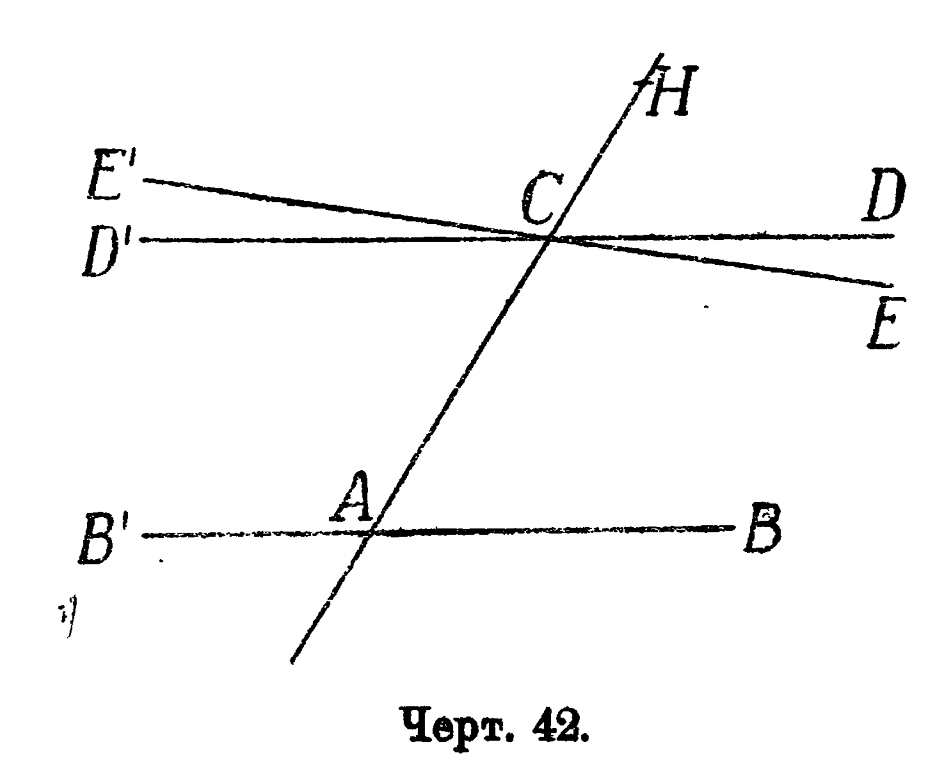
Черт. 41.

в точке A (в той же самой плоскости) восставляем к AB перпендикуляр AC; тогда прямые AC и a будут параллельными, так как, если бы они пересеклись в какой-нибудь точке O, то в $\Delta\, OAB$ сумма 2-х углов A и B равнялась бы 2-м прямым углам, что невозможно (напомним читателю, что параллельными называются прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся). Итак, одна параллельная найдена. Пусть AD — какая-нибудь другая прямая, проходящая через A; так как перпендикуляр — единственен, то AD — наклонная, и один из углов, образуемых ею с AB (напр., $\angle BAD$), будет острым. Тогда имеем:

$$\angle ABE + \angle BAD < 2d$$

и, в силу постулата Евклида, прямые AD и a пересекаются. Следовательно AC есть единственная параллельная, что и требовалось доказать.

Пусть теперь, наоборот, дано предложение об единственности параллельной, и, присоединяя его к другим предпосылкам геометрии, попытаемся вывести V-й посту-



Черт. 42.

лат. Пусть, именно, даны 2 прямые AB и CE (черт. 42), которые пересекаются 3-й прямой AC так, что:

$$(*) \ldots\ldots \angle BAC + \angle ACE < 2d;$$

надо доказать, что AB и CE пересекаются с той стороны от AC, с которой лежат указанные углы. Проведем прямую CD так, чтобы она образовала с продолжением AC угол DCH, равный углу BAC; тогда наверное $CD \parallel AB$. Действительно, если бы CD пересекала AB в некоторой точке O, то получился бы $\Delta\, OAC$, и его внешний угол DCH был бы равен внутреннему BAC, что невозможно (если бы пересечение имело место слева от AC, то мы говорили бы о равных углах $D'CH$ и $B'AC$).

Далее, для смежных углов при точке C имеем:

$$\angle DCH + \angle ACD = 2d,$$

или:

$$\angle BAC + \angle ACD = 2d;$$

сопоставляя это с неравенством (*), находим:

$$\angle ACE < \angle ACD.$$

Отсюда вытекает, что луч CE отличен от луча CD и лежит внутри $\angle ACD$. Таким образом прямая CE отлична от прямой CD, которая является единственной параллельной через точку C к прямой AB; а потому CE пересекает AB. Наконец, из 2-х лучей, на которые делится прямая CE точкой C, только луч CE может пересечь AB, так как другой луч CE' лежит по другую сторону от CD. Следовательно точка пересечения прямых CE и AB лежит с требуемой стороны от AC, что и требовалось доказать.

Второе предложение, о котором было упомянуто выше, заключается в следующем:

Постулат Евклида равносилен предложению: перпендикуляр и наклонная к одной прямой (в одной плоскости) всегда пересекаются.

Так как равносильность постулата Евклида с предложением об единственности параллельной уже доказана, то теперь можно первый заменить последним. Тогда теорема весьма просто доказывается с помощью черт. 41, на котором перпендикуляр AC во всяком случае параллелен прямой a. Если дана единственность параллельной, то всякая наклонная AD пересечет другой $\perp$-р BE; обратно, если всякая наклонная пересекается с BE, то $\perp$-р AC явится единственной параллельной, что и требовалось доказать.

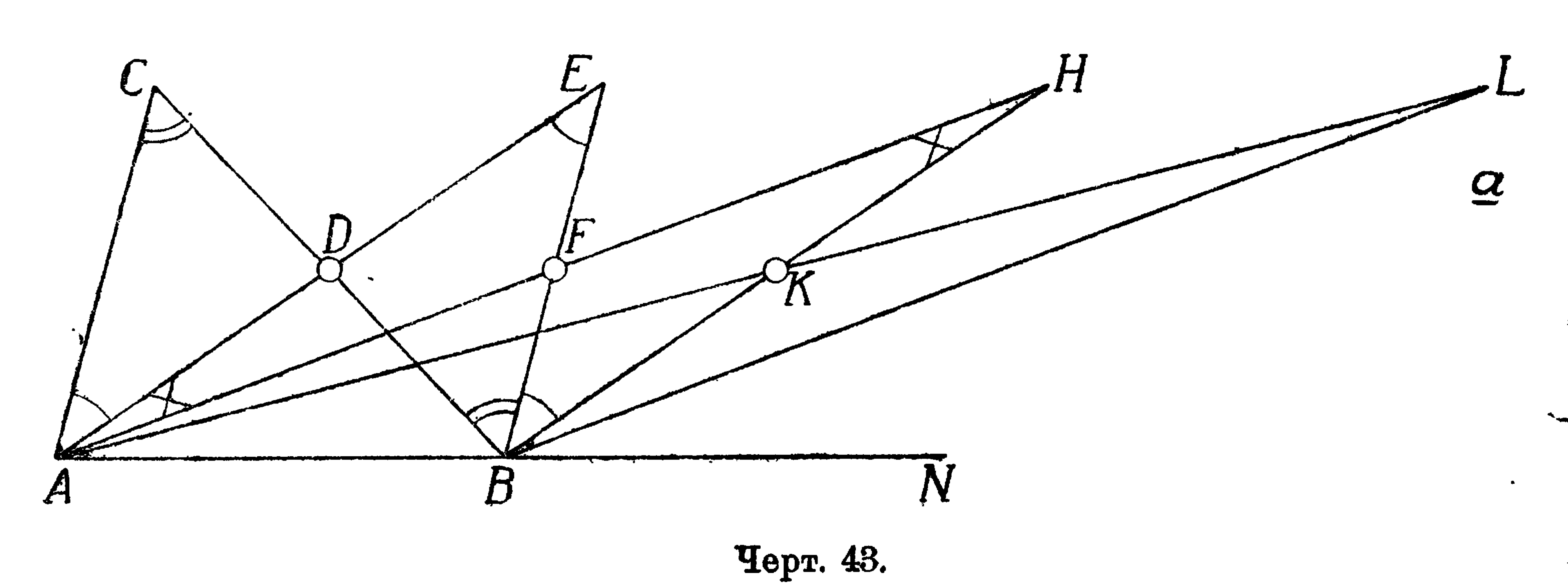
Возвращаясь к вопросу о сумме углов Δ-ка, условимся обозначать эту сумму символами вроде следующих:

$$S(\Delta),\ S(\Delta ABC) \text{ и т. д.}$$

Читатель, конечно, помнит, что в известной нам евклидовой геометрии, с помощью свойств параллельных прямых, доказывается следующая важная теорема:

$$S(\Delta) = 2d,$$

т.-е. сумма углов всякого Δ-ка равна 2-м прямым углам. Обратно, как будет доказано ниже, если бы мы сумели установить каким-нибудь иным путем это последнее предложение, то сумели бы доказать и постулат Евклида. На подобной точке зрения стоят *теоремы Саккери-Лежандра.* Будем пользоваться только теми предложениями геометрии, которые доказываются без помощи V-го постулата (сюда



Черт. 43.

относятся, напр.: деление отрезка и угла пополам, теоремы о равенстве Δ-ов и т. п.), и посмотрим, что можно сказать с такими средствами о сумме углов Δ-ка.

Теорема 1-я. Сумма углов Δ-ка не может быть больше 2-х прямых углов.

Попробуем допустить противное; пусть, именно, в ΔABC (черт. 43) имеем:

$$S\,(\Delta\,ABC) = 2d + \alpha, \text{ где } \alpha > 0.$$

Делаем следующее построение, которое будет далее применяться повторно. Сторону BC делим пополам в точке D, проводим отрезок AD и на его продолжении отмечаем точку E так, чтобы $DE = AD$; точку E соединяем с B. Так как в Δ-ках ADC и EDB имеем:

$AD = ED$, $DC = DB$, $\angle ADC = \angle EDB$ (как вертикальные),

то:

$$\triangle ADC = \triangle EDB;$$

отсюда далее выводим равенства:

$$\angle DAC = \angle DEB, \angle ACD = \angle EBD.$$

Теперь внимательное рассмотрение углов в Δ-ках ABC и ABE убедит читателя в том, что:

$$S\ (\triangle ABC) = S\ (\triangle ABE);$$

но:

$$S\ (\triangle ABE) = \angle EAB + \angle AEB + \angle ABE$$

$$S\ (\triangle ABE) = \angle A + (2d - \angle EBN).$$

Таким образом мы получили равенство:

$$S\ (\triangle ABC) = \angle A + 2d - \angle EBN,$$

и очевидно:

$$S\ (\triangle ABC) < 2d + A.$$

Первый шаг к доказательству сделан, и дальнейшее сводится к повторению таких же шагов. Угол A оказался разложенным на две части:

$$\angle EAB \text{ и } \angle AEB;$$

во всяком случае одна из этих частей не превышает половины A; пусть, именно:

$$(\ *\ )\ldots\ldots \angle EAB \leqslant \frac{A}{2}.$$

В таком случае к $\triangle ABE$ применяем предыдущее построение, деля в точке F пополам сторону BE, противолежащую углу EAB; затем проводим AE, делаем $(FH) = (AF)$ и соединяем H с B. Легко видеть, что:

$$\triangle AFE = \triangle HFB,$$

откуда:

$$\angle AEF = \angle HBF \text{ и } \angle FAE = \angle FHB;$$

теперь становится ясным, что:

$$S(\Delta ABE) = S(\Delta ABH),$$

и следовательно:

$$S(\Delta ABC) = S(\Delta ABH).$$

Вычисляем эту последнюю сумму:

$$S(\Delta ABH) = \angle HAB + \angle AHB + \angle ABH,$$

$$S(\Delta ABH) = \angle EAB + (2d - \angle HBN) < 2d + \angle EAB;$$

вспоминая неравенство (*), можем окончательно написать:

$$S(\Delta ABC) < 2d + \frac{A}{2}.$$

Переходя затем к ΔABL, получим новое неравенство:

$$S(\Delta ABC) < 2d + \frac{A}{2^2}, \text{ и т. д.};$$

продолжая эти рассуждения, дойдем до неравенства:

$$S(\Delta ABC) < 2d + \frac{A}{2^n},$$

где n — любое целое положительное число.

Подставляя сюда данное нам значение для $S(\Delta ABC)$, находим для всякого n:

$$2d + \alpha < 2d + \frac{A}{2^n},$$

откуда:

$$(\ **\ ) \ldots\ldots \alpha < \frac{A}{2^n}.$$

С другой стороны, величина $\frac{A}{2^n}$, при достаточно большом значении n, будет сколь угодно малой; следовательно най-

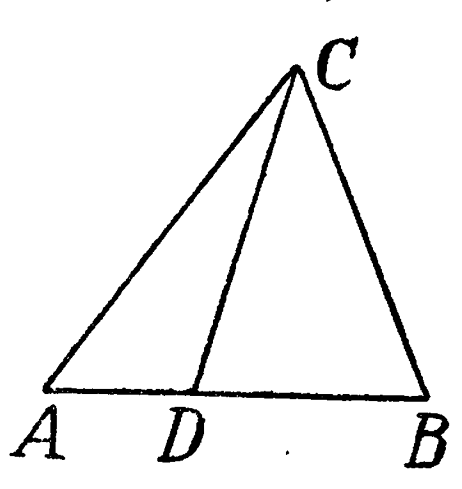
дется такое n, что эта дробь станет меньше данной нам постоянной величины α:

$$\frac{A}{2^n} < \alpha,$$

что противоречит неравенству (**). К этому противоречию нас привело допущение, что $S(\Delta ABC) > 2d$; а потому необходимо должно быть:

$$S(\Delta ABC) \leqslant 2d, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Прежде чем переходить к следующим теоремам Саккери-Лежандра, докажем некоторые вспомогательные предложения. Назовем *трансверсалью* Δ-ка отрезок, соединяющий его вершину с внутренней точкой противоположной стороны; так, на черт. 44 отрезок CD служит трансверсалью для ΔABC.



Черт. 44.

Лемма 1-я. Если сумма углов Δ-ка равна двум прямым, то она равна 2-м прямым и в каждом из 2-х частичных Δ-ков, на которые разлагается данный с помощью какой-либо трансверсали, и обратно.

Пусть нам дан ΔABC, и пусть этот Δ трансверсалью CD разложен на 2 частичных Δ-ка ADC и BDC (черт. 44). Читатель без труда убедится в следующем соотношении между углами всех 3-х треугольников:

$$(\,*\,)\ldots\ldots S(\Delta ADC) + S(\Delta BDC) = S(\Delta ABC) + 2d$$

(последнее слагаемое дают 2 смежных угла ADC и BDC).

Пусть теперь дано, что:

$$S(\Delta ABC) = 2d;$$

подставляя в (*), получаем:

$$S(\Delta ADC) + S(\Delta BDC) = 4d.$$

Оба наши слагаемые — положительны, и если бы мы попробовали допустить, что одно из них $<2d$, то другое оказалось бы $>2d$, а это невозможно по теореме 1-й; следовательно:

$$S(\Delta ADC) = S(\Delta BDC) = 2d.$$

Обратно, пусть нам даны эти последние равенства; подставляя в (*), имеем:

$$4d = S(\Delta ABC) + 2d,$$

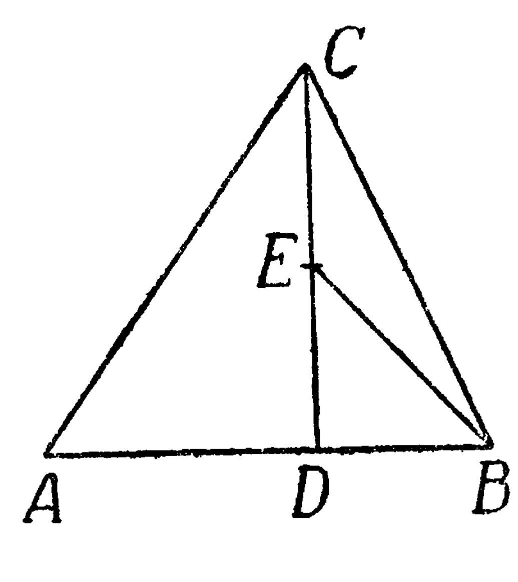
откуда:

$S(\Delta ABC) = 2d$, что и требовалось доказать.

Лемма 2-я. Если дан Δ, в котором сумма углов $= 2d$, то можно построить такой прямоугольный равнобедренный Δ, в котором сумма углов тоже равна $2d$, а катеты будут больше всякого наперед заданного отрезка.

Пусть дан ΔABC, относительно которого известно, что:

$$S(\Delta ABC) = 2d \text{ (черт. 45).}$$



Черт. 45.

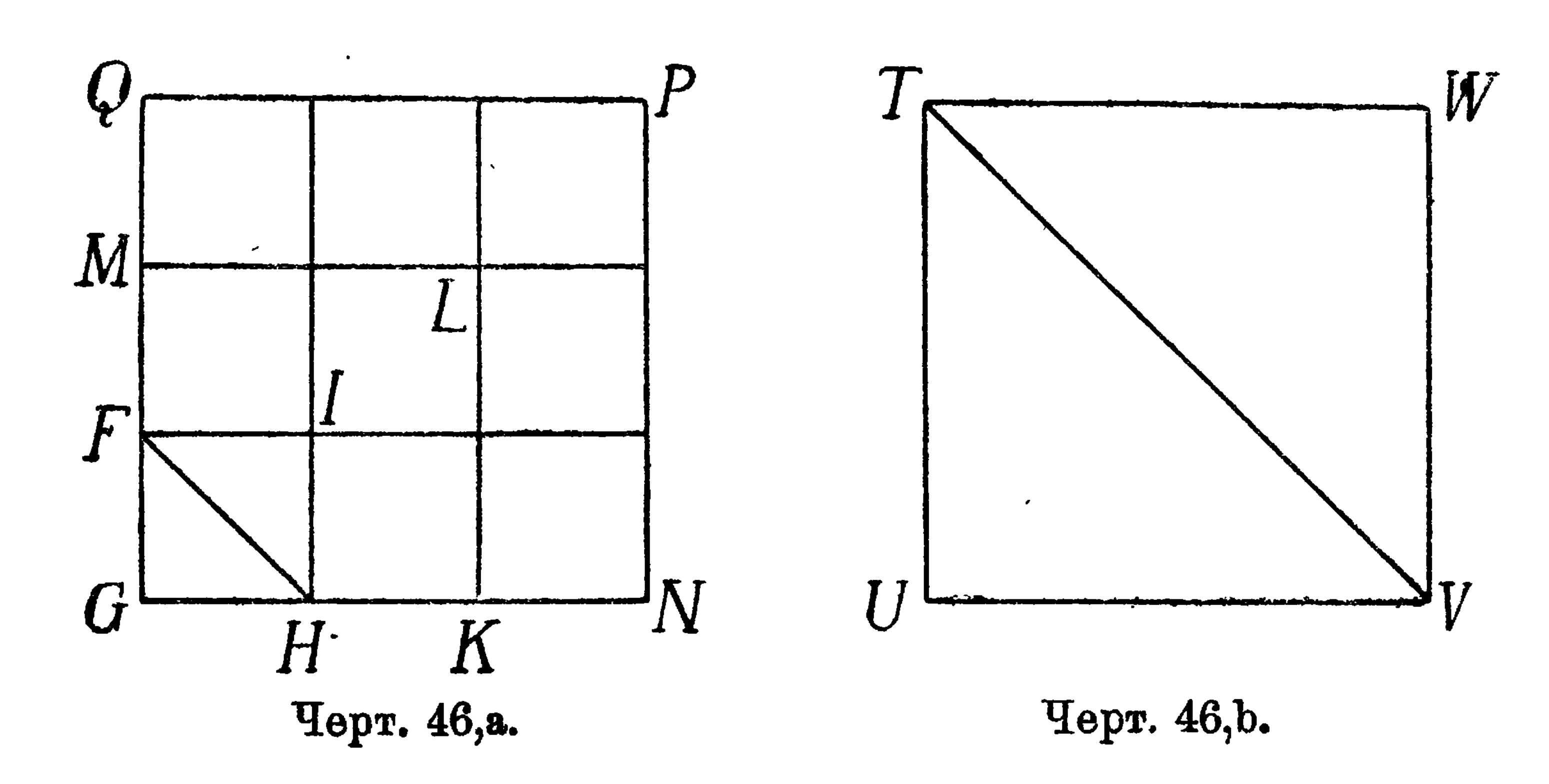
Если этот Δ прямоугольный, то наша ближайшая цель достигнута; если же нет, то опускаем высоту CD из вершины наибольшего угла; такая высота будет трансверсалью Δ-ка, и на основании леммы 1-й имеем:

$$S(\Delta BCD) = 2d.$$

Если ΔBCD равнобедренный, то наша ближайшая цель достигнута; в противном случае на большем катете CD откладываем $DE = DB$ и снова на основании леммы 1-й получаем:

$$S(\Delta EDB) = 2d.$$

Итак, мы построили прямоугольный равнобедренный Δ (обозначим его катет через a), у которого $S(\Delta) = 2d$. Пусть ΔFGH равен этому Δ-ку (черт. 46,a); на гипотенузе FH, по другую ее сторону, построим треугольник $FIH = \Delta FGH$. Получается 4-угольник $FGHI$, в котором все стороны



Черт. 46,a. Черт. 46,b.

равны a, а все углы — прямые; последнее очевидно для углов при G и I, а далее ясно, что каждый из углов:

$$\angle GFH, \angle IFH, \angle GHF, \angle IHF$$

равен половине прямого угла, ибо сумма острых углов наших Δ-ков равна прямому и эти углы равны между собой. Однако остережемся называть 4 угольник $FGHI$ квадратом, так как этот термин обычно связывается с учением о параллельных прямых, которым мы не имеем права здесь пользоваться. Прикладывая к $FGHI$ еще три равных ему фигуры, построим 4-угольник $MGKL$, у которого все стороны $= 2a$ и все углы — прямые; прикладывая сюда еще 5 четыреугольников, равных первоначальному $FGHI$, получим 4-угольник $QGNP$, у которого все стороны $= 3a$ и все углы прямые, и т. д. Наконец дойдем до 4-угольника $TUVW$ (черт. 46,b), у которого все стороны $= na$ и все

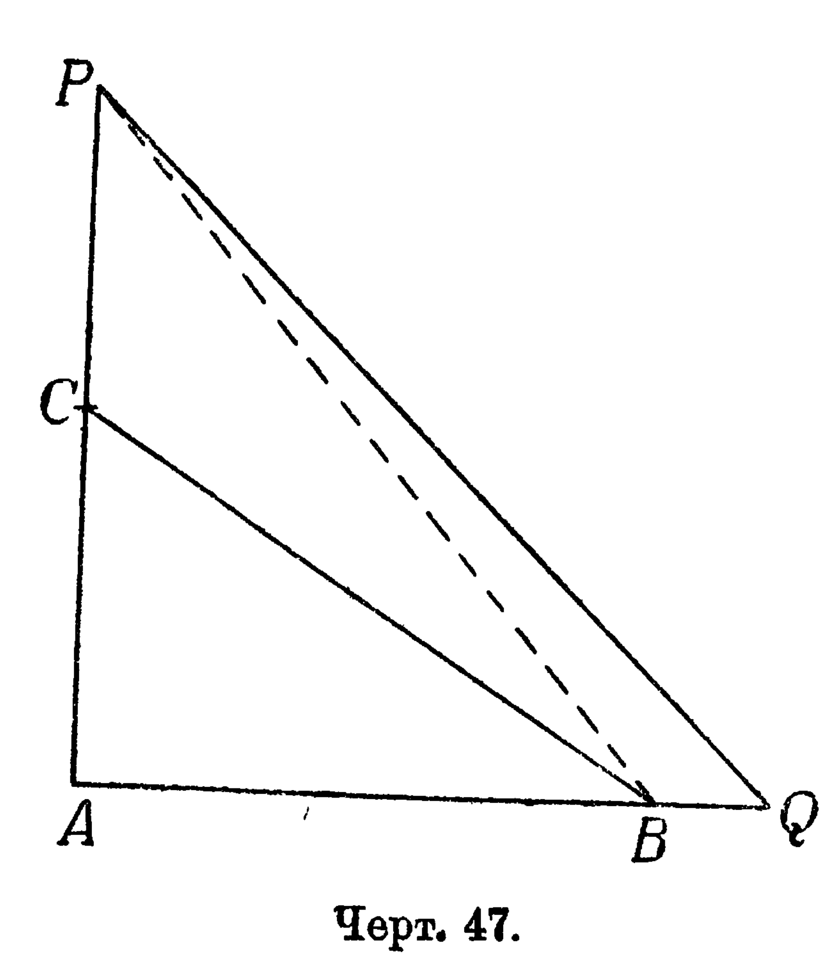
углы — прямые; здесь n может быть любым целым положительным числом. Проведя диагональ TV, построим ΔTUV, который будет прямоугольным и равнобедренным; сумма углов его равна $2d$, ибо сумма всех углов 2-х равных Δ-ков TUV и TWV равна $4d$; наконец, катеты нашего Δ-ка равны na и, при достаточно большом n, превзойдут всякий наперед заданный отрезок. Таким образом ΔTUV удовлетворяет всем поставленным условиям.

Теорема 2-я. Если в одном треугольнике сумма углов равна 2-м прямым углам, то она равна 2-м прямым и во всяком другом.

Положим, что в каком-нибудь одном Δ-ке KLM имеем:

$$S\ (\Delta\ KLM) = 2d;$$

докажем сначала, что в любом прямоугольном $\Delta\ ABC$ сумма углов тоже $= 2d$. На основании леммы 2-й, при прямом угле BAC (черт. 47) построим такой прямоугольный равнобедренный $\Delta\ QAP$, у которого сумма углов $= 2d$, а катеты больше наибольшего из отрезков AB и AC. Тогда PB будет трансверсалью этого Δ-ка, а потому, на основании леммы 1-й, имеем:



Черт. 47.

$$S\ (\Delta\ ABP) = 2d;$$

в этом последнем Δ-ке отрезок BC будет также трансверсалью, а потому:

$$S\ (\Delta\ ABC) = 2d.$$

Итак, при данных условиях, во всяком прямоугольном Δ-ке сумма углов $= 2d$. Возьмем теперь любой ΔABC (черт. 45) и высотой CD разобьем его на 2 частичных прямоугольных Δ-ка ADC и BDC; так как по предыдущему:

$$S\,\Delta(ADC) = S\,(\Delta BDC) = 2d,$$

то лемма 1-я (обратное утверждение) приводит к выводу, что:

$$S\,(\Delta ABC) = 2d,$$

а это и требовалось доказать.

Теорема 3-я. Если в одном треугольнике сумма углов меньше 2-х прямых, то она меньше 2-х прямых и во всяком другом.

Положим, в некотором Δ-ке сумма углов $< 2d$, и возьмем совершенно произвольный ΔABC. На основании теоремы 1-й:

$$S\,(\Delta ABC) \leqslant 2d;$$

но если бы оказалось, что $S\,(\Delta ABC) = 2d$, то, в силу теоремы 2-й, и в данном Δ-ке сумма углов должна бы $= 2d$, что противоречит заданию. Итак, должно быть:

$$S\,(\Delta ABC) < 2d, \text{ что и требовалось доказать.}$$

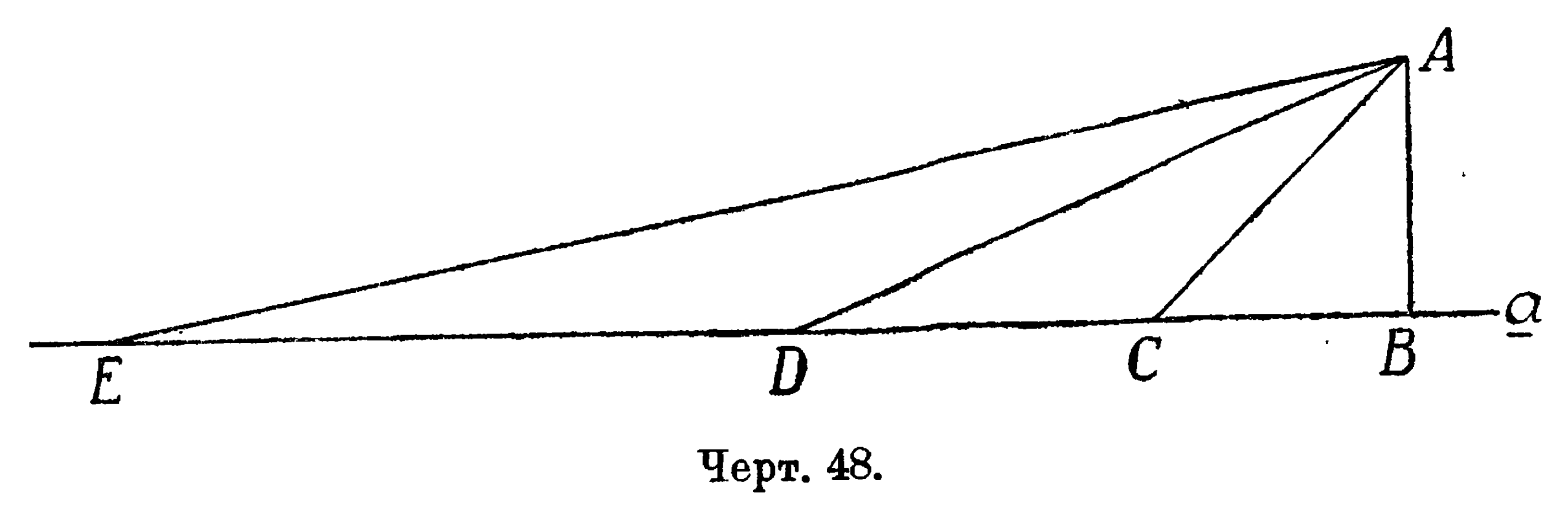
Связь вопроса о величине суммы углов Δ-ка с учением о параллельных прямых выяснится еще более в нижеследующих предложениях.

Лемма 3-я. Из точки вне прямой можно провести луч, пересекающий данную прямую под произвольно-малым углом.

Пусть нам дана прямая a и вне ее точка A (черт. 48). Опустим из A перпендикуляр AB на a и отложим $BC = BA$ в ту или другую сторону от B; получим равнобедренный прямоугольный ΔABC, и пусть его острые углы $\angle ACB = \angle BAC = \alpha$. Далее в ту же сторону, что и раньше,

отложим $CD = CA$ и получим равнобедренный ΔACD; пусть:

$$\angle ADC = \angle CAD = \alpha_1.$$



Черт. 48.

Для суммы углов этого Δ-ка имеем:

$$S(\Delta ACD) = 2\alpha_1 + \angle ACD = 2\alpha_1 + 2d - \alpha;$$

на основании теоремы 1-й:

$$2\alpha_1 + 2d - \alpha \leqslant 2d,$$

откуда:

$$\alpha_1 \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

Точно так же построим равнобедренный ΔADE, в котором:

$$DE = DA \text{ и } \angle AED = \angle DAE = \alpha_2;$$

для него:

$$S(\Delta ADE) = 2\alpha_2 + \angle ADE = 2\alpha_2 + 2d - \alpha_1;$$

а так как должно быть:

$$2\alpha_2 + 2d - \alpha_1 \leqslant 2d,$$

то:

$$\alpha_2 \leqslant \frac{\alpha_1}{2};$$

а потому и подавно:

$$\alpha_2 \leqslant \frac{\alpha}{2^2}.$$

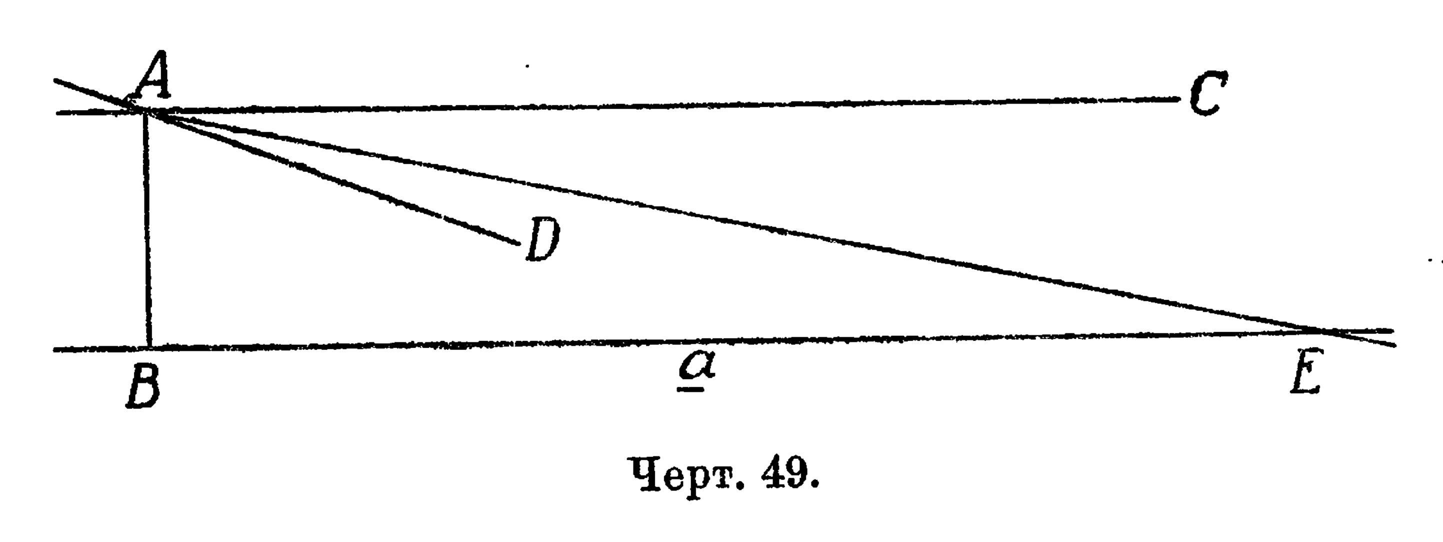
Продолжая эти рассуждения, дойдем до луча, пересекающего a под углом:

$$\alpha_n \leqslant \frac{\alpha}{2^n},$$

а так как, при достаточно большом n, дробь $\frac{\alpha}{2^n}$ может быть сделана сколь угодно малой, то теорема доказана.

Теорема 4-я. Если сумма углов Δ*-ка равна* $2d$*, то имеет место постулат Евклида.*

На основании доказанного выше о равносильности V-го постулата некоторым другим предложениям, можно заменить его утверждением об единственности параллельной. Пусть дана прямая a и вне ее — точка A (черт. 49); про-



Черт. 49.

водя перпендикуляры AB и AC, построим прямую AC, параллельную данной. Нам надо доказать, что это — единственная прямая, параллельная a; другими словами, всякая прямая AD, лежащея в той же плоскости и отличная от AC, должна пересечь a. В виду необходимости уместить чертеж в небольшом пространстве, угол CAD взят довольно большим, так что пересечение прямых AD и a очевидно для глаза, и у читателя, пожалуй, возникнет сомнение, стоит ли доказывать такое очевидное обстоятельство. Но

если бы $\angle CAD$ был весьма мал, то это уже не было бы так очевидно (особенно при достаточно большом расстоянии AB); главное же — читатель должен помнить, что чертеж может быть и неверен, да он и всегда представляет лишь грубую модель геометрических образов. Поэтому в геометрии никогда нельзя утверждать чего-либо, основываясь только на чертеже; решающее значение имеет лишь логическое доказательство; здесь будет уместно также вспомнить то, что говорилось в главе II-й о строго-научном построении геометрии. Итак, обращаемся к доказательству, останавливаясь на той стороне плоскости по отношению к прямой AB, с которой лежит острый угол DAB. На основании леммы 3-й, проведем луч AE, пересекающий a так, что:

$$(*)\ldots\ldots \angle BEA < \angle CAD.$$

Нам дано, что:

$$S\,(\Delta\, ABE) = 2d,$$

а так как:

$$\angle ABE = d,$$

то:

$$\angle BAE + \angle BEA = d.$$

С другой стороны:

$$\angle BAE + \angle CAE = d,$$

так как $\angle BAC = d$; сопоставляя эти 2 равенства, имеем

$$\angle CAE = \angle BEA.$$

Тогда неравенство (*) дает:

$$\angle CAE < \angle CAD;$$

кроме того, оба эти угла — острые. Отсюда вытекает, что луч AD лежит внутри угла BAE, как это и изображено

на чертеже; а теперь уже ясно, что этот луч пересечет отрезок BE. Итак, всякая прямая, проходящая через A и отличная от AC, пересекает a, что и требовалось доказать.

Сопоставляя теорему 4-ю с тем обстоятельством, что в элементарной геометрии с помощью постулата Евклида (или предложения, ему равносильного) доказывается теорема о равенстве $S(\Delta)$ двум прямым углаи, можно высказать следующее:

Постулат Евклида равносилен предложению о том, что сумма углов Δ-ка равна 2-м прямым углам.

Уже 1-я теорема Саккери-Лежандра устранила возможность того, что $S(\Delta) > 2d$; если бы удалось доказать,— конечно, без помощи V-го постулата,— что не может быть, чтобы $S(\Delta) < 2d$, то 2000-летняя задача получила бы положительное решение. Мы разберем сейчас одну из попыток такого рода, чтобы познакомить читателя с кажущимися доказательствами постулата Евклида. Попытка эта принадлежит тому же Лежандру; но справедливость требует заметить, что он сам не признал своего доказательства вполне безупречным. В интересах простоты и ясности, мы изложим указанное рассуждение в упрощенном виде, так что у самого Лежандра дело обстоит не так грубо.

Итак, попробуем допустить, что:

$$S(\Delta\, ABC) = 2d - \alpha, \text{ где } \alpha > 0;$$

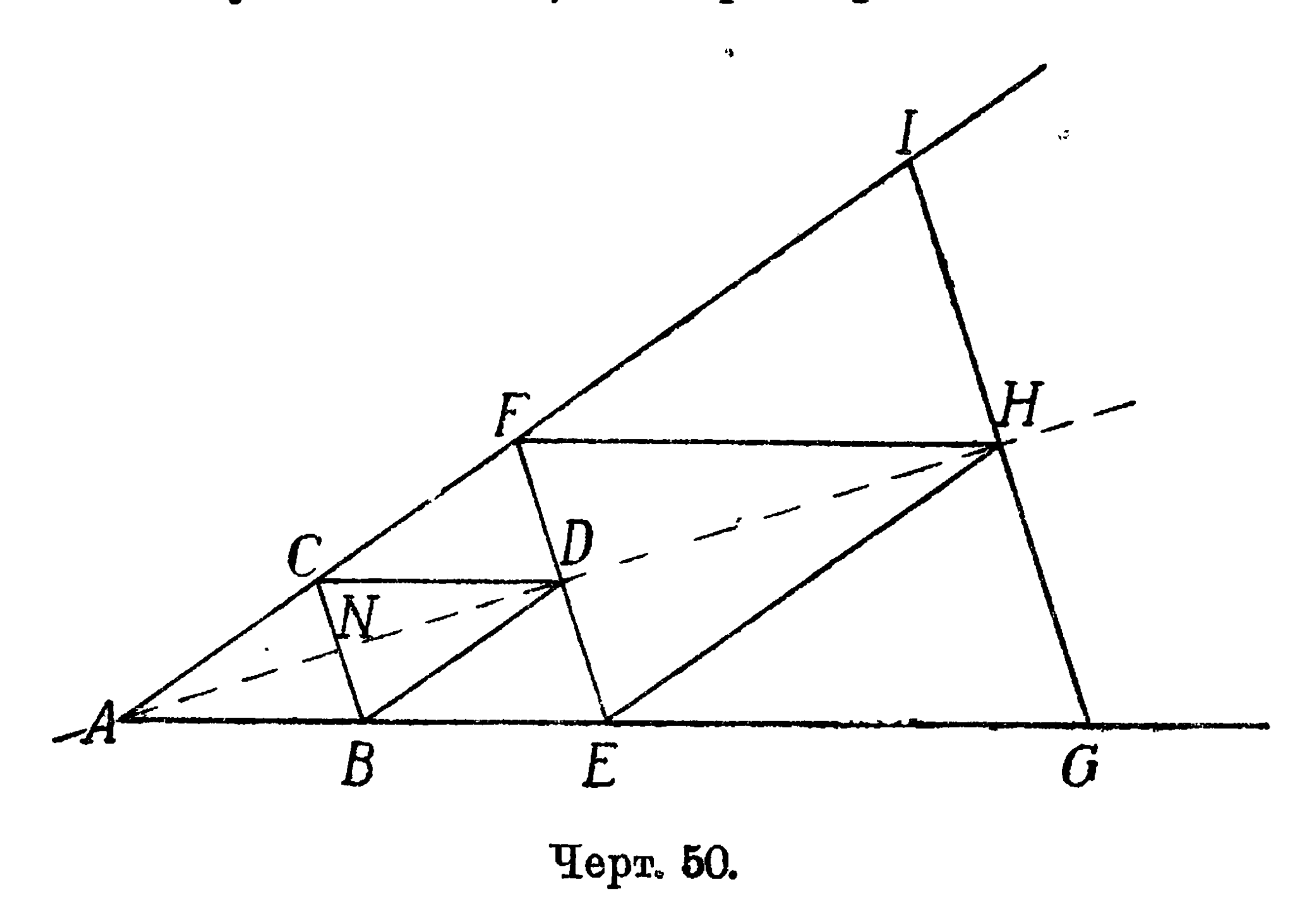
имея в виду теорему 3-ю, мы возьмем равнобедренный Δ (черт. 50, где $AB = AC$). Проведем биссектриссу угла A и на ней отметим точку D, так что:

$$ND = NA;$$

не трудно убедиться, что:

$$\Delta\, DBC = \Delta\, ABC, \text{ откуда: } S(\Delta\, DBC) = 2d - \alpha.$$

Теперь в точке D восставим к равноделящей угла перпендикуляр, который пересечет стороны угла в точках F и E. Получим $\Delta\, FAE$, который разложен на 4 тре-



Черт. 50.

угольника; легко видеть, что между углами всех этих Δ-ов существует зависимость:

$$S(\Delta\, ABC) + S(\Delta\, DBC) + S(\Delta\, FCD) + S(\Delta\, DBE) =$$
$$= S(\Delta\, FAE) + 6d$$

(последнее слагаемое объясняется тем, что при точках B, C, D получаем по 2 прямых угла, которые не входят в сумму углов большого Δ-ка). На основании опять-таки теоремы 3-й можно написать:

$$S(\Delta\, FCD) = 2d - \beta, \text{ где } \beta > 0;$$
$$S(\Delta\, DBE) = 2d - \gamma, \text{ где } \gamma > 0;$$

подставляя, имеем:

$$8d - 2\alpha - \beta - \gamma = S(\Delta\, FAE) + 6d,$$
$$S(\Delta\, FAE) = 2d - 2\alpha - \beta - \gamma,$$
$$S(\Delta\, FAE) < 2d - 2\alpha.$$

Здесь сделан первый шаг к доказательству, который заключается в том, что от ΔABC с суммой углов $= 2d - \alpha$ мы перешли к ΔFAE с суммой углов $< 2d - 2\alpha$.

Дальше повторяются подобные же построения: откладываем $DH = DA$, так что $\Delta FHE = \Delta FAE$, и проводим IH перпендикулярно к AH. Подобно предыдущему имеем:

$$S(\Delta FAE) + S(\Delta FHE) + S(\Delta IFH) + S(\Delta HEG) =$$
$$= S(\Delta IAG) + 6d;$$

далее:

$$S(\Delta FAE) = S(\Delta FHE) < 2d - 2\alpha;$$
$$S(\Delta IFH) = 2d - \beta_1;$$
$$S(\Delta HEG) = 2d - \gamma_1;$$

подстановка дает:

$$S(\Delta IAG) + 6d < (4d - 4\alpha) + 4d - \beta_1 - \gamma_1,$$

откуда:

$$S(\Delta IAG) < 2d - 2^2 \cdot \alpha.$$

Таким образом мы сделали второй шаг, построив ΔIAG, в котором сумма углов $< 2d - 2^2 \cdot \alpha$, и т. д. Продолжая эти построения, мы дойдем до такого Δ-ка, что:

$$S(\Delta) < 2d - 2^n \cdot \alpha;$$

а так как, при достаточно большом n, величина $2^n \cdot \alpha$ станет больше $2d$, то сумма трех положительных углов окажется отрицательной, что̀ невозможно. След. допущение, что $S(\Delta) < 2d$, привело нас к нелепости, и постулат Евклида как будто бы доказан.

В чем же заключается ошибка изложенного, довольно простого доказательства? Всматриваясь в него, можно подметить, что существенным пунктом является образо-

вание Δ-ков FAE, IAG и т. д.; другими словами, делается утверждение, что перпендикуляры к равноделящей угла A пересекают его стороны. Казалось бы, это — вполне очевидно; но нельзя забывать, что, вводя какое-нибудь утверждение, как очевидное (т.-е. без доказательства), мы в сущности скрытым образом вводим новую аксиому; а весь смысл настоящего исследования — в том, что ищется доказательство V-го постулата без помощи новых аксиом. В частности, утверждая, что $\perp$-р к равноделящей всегда пересекает сторону угла, мы в сущности утверждаем, что $\perp$-р и наклонная к одной и той же прямой AH всегда пересекаются; а это есть предложение, равносильное тому самому V-му постулату, для доказательства которого и придумано все рассуждение. Таким образом здесь имеется поучительный пример ошибки, которую в логике называют „порочным“ или „заколдованным кругом“.

К теоремам Саккери-Лежандра естественно будет присоединить еще одно предложение о V-м постулате, которое можно назвать *теоремой Валлиса:*

Постулат Евклида равносилен предложению о существовании подобных (но не равных) треугольников.

Действительно, в элементарной геометрии, при помощи теории параллельных прямых, развивается учение о подобии. Обратно, пусть нам даны два Δ-ка ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы соответственно равны, а стороны не равны, и пусть для определенности AB больше сходственной стороны A_1B_1. На стороне AB отложим $AB_2 = A_1B_1$ и построим $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$; легко видеть, что получим $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ (черт. 51); след. в Δ-ках AB_2C_2 и ABC все углы соответственно равны, а потому:

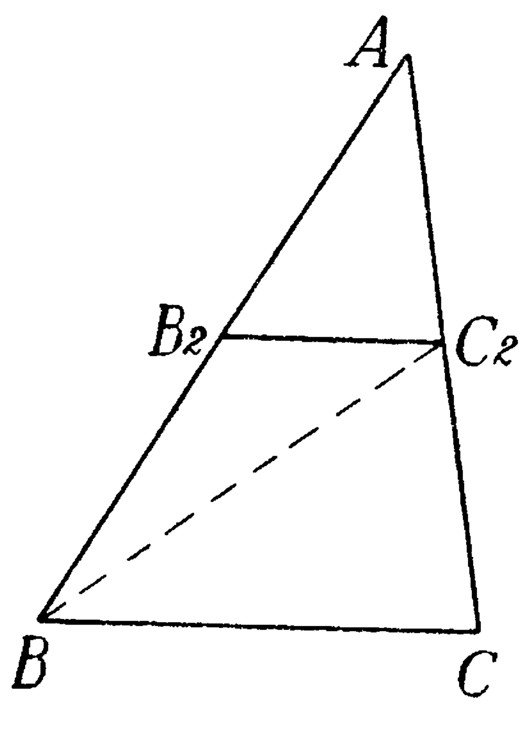
$$(\ *\ )\ldots\ldots S(\Delta AB_2C_2) = S(\Delta ABC).$$

На основании 1-й теоремы Саккери-Лежандра, относительно этой суммы можно сделать только 2 допущения:

или она $= 2d$, или она $< 2d$. Остановимся на последнем и проведем отрезок BC_2; легко прийти к зависимости:

$$S(\Delta\, AB_2C_2) + S(\Delta\, BB_2C_2) + S(\Delta\, BC_2C) = S(\Delta\, ABC) + 4d.$$

Теорема 3-я позволяет сделать заключение о сумме углов 2-х новых Δ-ков:



Черт. 51.

$$S(\Delta BB_2C_2) = 2d - \beta, \text{ где } \beta > 0;$$

$$S(\Delta\, BC_2C) = 2d - \gamma, \text{ где } \gamma > 0;$$

подставляя, имеем:

$$S(\Delta\, AB_2C_2) - \beta - \gamma = S(\Delta\, ABC),$$

откуда:

$$S(\Delta\, AB_2C_2) > S(\Delta\, ABC),$$

в противоречие с равенством (*). Итак, разбираемое допущение придется отбросить и принять, что:

$$S(\Delta\, AB_2C_2) = 2d;$$

но тогда имеет место постулат Евклида (теор. 4-я), что и требовалось доказать.

Рассмотрение вопроса о сумме углов треугольника заставило нас прервать исторический очерк на конце XVIII века. В течение следующих 2—3 десятков лет вопрос о V-м постулате был наконец решен, но не так, как надеялись предыдущие исследователи: была создана новая геометрия с иной теорией параллельных, и благодаря этому была установлена недоказуемость V-го постулата. При этом произошло замечательное явление: когда

вопрос достаточно созрел для решения, то несколько ученых одновременно и независимо друг от друга пришли к одному и тому же открытию. Если принять во внимание те признаки, по которым решается вопрос о первенстве (время опубликования, систематическую разработку), то эту честь придется присудить нашему соотечественнику, профессору Казанского университета Николаю Ивановичу Лобачевскому*); но во всяком случае его славу разделяют и другие лица.

Первым на рубеже XIX столетия к созданию неевклидовой геометрии пришел „король математиков“—Гаусс (1777—1855), но им ничего не было опубликовано по этому вопросу. Из писем Гаусса к друзьям, которые стали общеизвестны лишь после его смерти, видно, что он глубоко проник в новую область геометрии. Эти краткие сообщения всегда сопровождались указаниями, что они не подлежат опубликованию; Гаусс откровенно сознается, что не печатает этих своих исследований, опасаясь непонимания современников. История показала, что знаменитый математик был прав в своих опасениях. Вторым по времени то же самое открытие сделал профессор-юрист Швейкарт, бывший в период 1812—1816 гг. профессором у нас в Харькове. Ничем не замечательный, как юрист, он, будучи любителем в области геометрии, сравнялся своим открытием с выдающимися геометрами своего времени. Швейкарт ничего не напечатал из своих работ, не относящихся к его специальности; но о них стало известно Гауссу, который и выразил свое полное одобрение и признание — опять-таки в частном письме. К новым идеям Швейкарт пришел в бытность свою в Харькове, и это

*) О жизни и деятельности Лобачевского см. след. книги: „Н. И. Лобачевский“, изд. Павленкова, СПб. 1894. Проф. А. В. Васильев, „Н. И. Лобачевский“, СПб. 1914 (очерк из „Русского Биографического Словаря“).

дало повод Герлингу, одному из корреспондентов Гаусса, сострить по поводу „русских степей“, способствующих такого рода изысканиям.

Двадцать лет спустя, почти одновременно, к созданию неевклидовой геометрии пришли два молодых ученых, жившие в противоположных и достаточно захолустных уголках Европы: Н. И. Лобачевский (1793—1856) в Казани и венгерский офицер Іоганн Больяи (1802—1860) в одном из городков Венгрии. Оба опубликовали свои работы: Лобачевский — в 1829 г. и Больяи — в 1832 г.; опасения Гаусса оправдались: обоим пришлось немало перенести от непонимания современников. „Королю математиков“ обе работы стали известны; с отцом Больяи его связывала давняя дружба, а работы Лобачевского он мог читать даже и в подлиннике: занимаясь в виде отдыха языками, Гаусс понимал по-русски. Оба молодых ученых получили его одобрение, выраженное в частной переписке.

Около середины XIX столетия все действующие лица сошли со сцены; казалось, сделанные открытия прошли бесследно. Конечно, рано или поздно работы творцов неевклидовой геометрии были бы поняты и оценены по достоинству; признание их было ускорено тем обстоятельством, что в 60-х годах появилась в печати переписка Гаусса, из которой ученый мир узнал как о его собственных работах, так и о работах других в области неевклидовой геометрии. Лед был сломан, и в течение небольшого времени создалась значительная литература, посвященная этой новой отрасли геометрии. Когда в 1893 г. Казанский университет праздновал столетний юбилей со дня рождения Лобачевского, то в этом празднестве приняли участие ученые всего мира.

Н. И. Лобачевский начал, по примеру многих, с попыток доказать V-й постулат, но скоро убедился в их безуспешности. Однако названный постулат занимал в его

глазах, как и в глазах его предшественников, совершенно особое положение среди других предпосылок геометрии, а потому он не мог принять эту недоказуемую предпосылку так же просто, как принимал другие. Поэтому у Лобачевского возникла мысль построить *„полную теорию параллельных“*, не вводя с самого начала V-го постулата; он поставил себе целью исследовать все возможности, которые только могут представиться в этом вопросе. Одной из таких возможностей несомненно является постулат Евклида; но как сложится общее учение о параллельности? Решение поставленного вопроса послужило жизненной задачей Лобачевского; его главнейшие работы, написанные на русском и иностранных языках, посвящены этой теме; наиболее систематически вопрос изложен в „Новых началах геометрии с полной теорией параллельных“ *).

С целью усвоить отчетливее исходное положение „полной теории параллельных“, произведем небольшое предварительное исследование. Станем снова на точку зрения, которая уже нам знакома, а именно: допустим, что в нашем распоряжении имеются все предложения геометрии, не зависящие от постулата Евклида. Владея указанным запасом знаний, поставим вопрос, кàк может вообще обстоять дело с пересечением и непересечением прямых, лежащих в одной плоскости; такая постановка вопроса и приведет нас к точке зрения Лобачевского, причем попутно нам придется обобщить самое понятие о параллельных прямых.

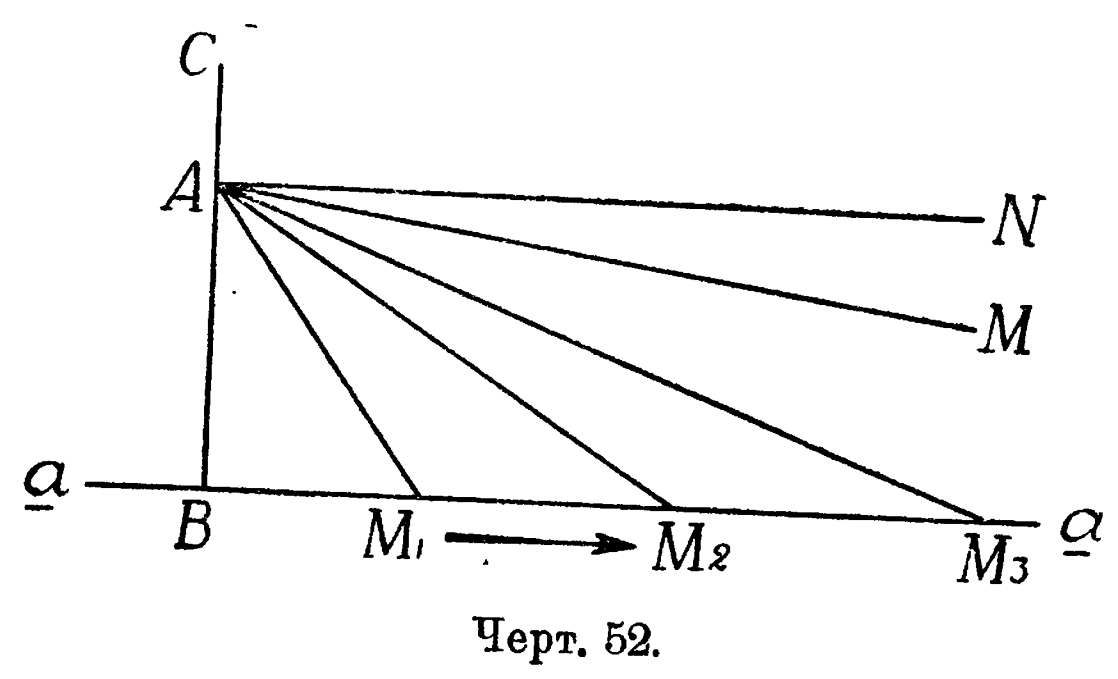
Итак, пусть в некоторой плоскости дана прямая a и вне ее — точка A (черт. 52); вообразим себе пучок прямых с центром в A и рассмотрим, какие из его прямых пересекают данную прямую a и какие ее не пересекают. Но

---

*) Переиздано Харьковским Матем. Обществом в 1912 г. под ред. и с примечаниями проф. Дм. М. Синцова.

проще будет начать исследование с полупрямых, или лучей, исходящих из точки A, а потом уже перейти к полным прямым.

Вся наша фигура, состоящая из прямой a и пучка лучей с центром в A, делится прямою AB, перпендикулярной к данной, на две совершенно симметричные части.



Черт. 52.

Ясно, что два луча, симметричные друг с другом относительно AB, или оба пересекают a, или оба не пересекают этой прямой. Поэтому, если мы рассмотрим одну часть пучка (напр., правую), то будем знать, что̀ происходит и в другой.

Построим какой-нибудь луч AM_1, пересекающий a в точке M_1. Пусть эта точка *непрерывно* перемещается по прямой в направлении, указанном стрелкой; тогда секущий луч становится переменным и занимает ряд новых положений: AM_2, $AM_3, \ldots$ По мере того, как точка пересечения удаляется в бесконечность по прямой a, переменный луч приближается к некоторому предельному положению. Действительно, угол, образуемый переменным лучом с полупрямою AB, все время возрастает:

$$\angle BAM_1 < \angle BAM_2 < \angle BAM_3 < \ldots\ldots;$$

однако он всегда остается меньше прямого угла BAN: мы

знаем, что луч *AN*, перпендикулярный к *AB*, во всяком случае не пересекает *a*; тем более этим свойством обладают лучи, образующие тупой угол. При таких условиях переменная величина стремится к определенному пределу; в частности, наш переменный угол будет иметь своим пределом постоянный угол *BAM*, меньший угла *BAN* или равный ему. След. предельным положением переменного луча будет вполне определенный луч *AM*. На чертеже мы изобразили его отличным от *AN*; но он может и совпадать с ним. У нас сейчас нет данных для того, чтобы остановиться на одной из этих 2-х возможностей, устранив другую; отсюда вытекает необходимость рассматривать оба случая.

Остановимся на свойствах предельного луча *AM*. Сам он не пересекает прямой *a*; в самом деле, если бы он пересекал ее в точке *Q*, то, взяв на прямой *a* точку Q_1, за точкой *Q*, мы получили бы секущий луч AQ_1, которому соответствовал бы угол $BAQ_1 > \angle BAM$, так что этот последний не был бы предельным. Далее, вся рассматриваемая (правая) часть пучка лучей делится лучом *AM* на 2 угла:

$$\angle BAM \text{ и } \angle MAC,$$

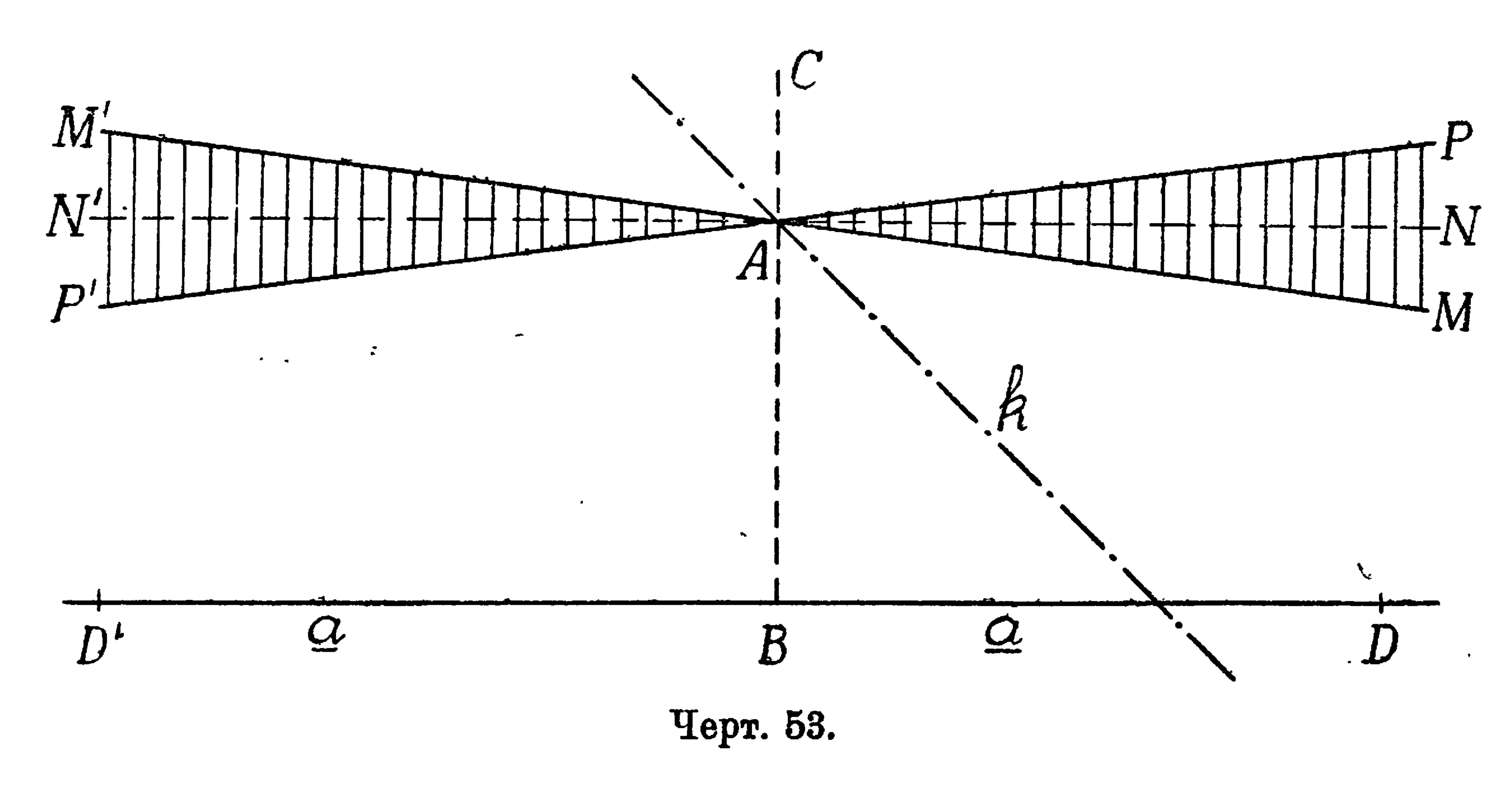
причем всякий луч, лежащий внутри $\angle BAM$, пересекает *a*, а всякий луч, лежащий внутри $\angle MAC$, не пересекает этой прямой. Действительно, если луч *AR* лежит внутри 1-го угла, то

$$\angle BAR < \angle BAM,$$

и так как разность между этими углами имеет конечную величину, то $\angle BAR$ равен одному из тех значений переменного угла, которым соответствуют лучи, пересекающие *a*. Если же луч *AR* лежит внутри $\angle MAC$, то он не может встречать прямую *a*, так как в этом случае должно быть:

$$\angle BAR < BAM, \text{ а по заданию: } \angle BAR > \angle BAM.$$

В другой части пучка A (левой) дело обстоит совершенно так же: и там имеется пограничный луч AP', отделяющий лучи, пересекающие a, от лучей, ее не пересекающих; этот луч должен быть симметричен с AM относительно AB. Сольются ли лучи AM и AP' в одну прямую или будут принадлежать различным прямым, — этого мы не можем решить с нашими ограниченными средствами На черт. 53 эти лучи изображены лежащими на различ-



Черт. 53.

ных прямых MM' и PP', которые, однако, могут слиться в одну прямую.

Перейдем теперь к рассмотрению пучка полных прямых, проходящих через точку A. Прямые MM' и PP' делят весь пучок на две части, из которых каждая образована парой вертикальных углов; на черт. 53 одна из этих частей слегка заштрихована, а другая оставлена чистой. Возьмем какую-нибудь прямую k, принадлежащую последней части; в точке A она делится на 2 луча, из которых один попадает или внутрь угла BAM, или внутрь угла BAP', где лежат лучи, пересекающие a; след. всякая прямая, лежащая внутри рассматриваемой части пучка, пере-

секает данную прямую. Если же возьмем прямую внутри заштрихованной части, то один из ее лучей попадет в угол *MAC*, а другой — в угол *P'AC*, где лежат лучи, не пересекающие *a*; след. всякая прямая, лежащая внутри заштрихованной части (как, напр., прямая *NN'*, перпендикулярная к *AB*), не пересекает данной прямой. Мы знаем также, что сами прямые *MM'* и *PP'* не могут встретиться с прямою *a*.

Таким образом выяснено исходное положение общего учения о пересечении и непересечении прямых, лежащих в одной плоскости; это общее учение приходит к следующему выводу. Через точку, данную вне прямой, проходят 2 прямые, делящие всю плоскость на 2 части; прямые одной части пересекают данную, а прямые другой — не пересекают ее; сами пограничные прямые принадлежат также к числу непересекающих. Теперь мы можем дать общее определение параллельных прямых (обычное определение является его частным случаем): *прямыми, параллельными a в точке A, называются две прямые, пограничные между пересекающими a и не пересекающими ее* (речь идет исключительно о прямых, лежащих в данной плоскости). Для того, чтобы различить эти две параллели, условимся говорить, что прямая *M'M* параллельна *a* в направлении *BD*, а прямая *PP'* — параллельна ей в направлении *BD'*.

После этого перед нами открываются 2 и только 2 возможности: или пограничные прямые сливаются в одну прямую, или они различны. На основании теорем Саккери-Лежандра можно доказать, что осуществившаяся однажды возможность будет иметь место всегда и везде; но мы не будем входить в подробное доказательство. Итак, возможны лишь два случая:

1) Прямые *M'M* и *P'P* совпадают в одну; в силу симметрии относительно *AB*, они в таком случае совпадают с прямою *N'N*, перпендикулярной к *AB*. Таким образом

вся заштрихованная часть плоскости сводится к одной прямой $N'N$, которая и будет единственной прямой, проходящей через A и не пересекающей a. Ясно, что в таком случае получается известная из элементов евклидова геометрия; прямая $N'N$, с которой совпали наши параллельные, будет параллельной в обыкновенном смысле этого слова.

2) Прямые $M'M$ и $P'P$ различны; в таком случае через A проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающих данной, но только две пограничные признано целесообразным называть параллельными. Ясно, что получается совершенно новая система геометрии, которая во многом будет резко отличаться от геометрии Евклида; эту систему мы условимся называть *неевклидовой геометрией Лобачевского.*

В „Новых началах“ исследуются обе возможности, которые, вместе взятые, и образуют „полную теорию параллельных“; но, конечно, весь интерес книги сосредоточивается на развитии неевклидовой геометрии.

Таким образом „геометрия Лобачевского“ отличается от „геометрии Евклида“ только аксиомой, лежащей в основе учения о параллельных; вместо постулата Евклида здесь принимается другое предложение, которое можно назвать *постулатом Лобачевского: через данную точку к данной прямой имеются две различные параллели* (при этом надо иметь в виду то общее определение параллельных прямых, которое было дано выше). Все же остальные аксиомы в обеих геометриях — одни и те же; что̀ это за аксиомы — отчасти было указано выше (напр., в главе II), а полностью они будут перечислены в следующей, последней главе. Но изменение только одной аксиомы внесет резкое расхождение по многим вопросам, и чрезвычайно поучительно проследить, как сказывается влияние новой предпосылки на дальнейшее развитие геометрии. Без-

условно общим у обеих систем является то, что̀ в своем обосновании не зависит от учения о параллельных прямых; например, первые 28 предложений I-й книги „Начал“.

Приступающие к изучению неевклидовой геометрии иногда испытывают одно сомнение, связанное с чертежами, поясняющими доказательства. Так, на черт. 53 прямые AM и AP' не должны пересекать прямой a, тогда как для нашего глаза очевидно как раз противоположное; в таком случае можно ли серьезно говорить о системе геометрии, которую нельзя снабдить верными чертежами? Мы постараемся ответить на это недоумение. Во-первых, в настоящей книге мы уже неоднократно подчеркивали, что всякий чертеж по существу неверен, ибо является лишь грубой моделью геометрических фигур; но это ничему не вредит, так как чертеж при доказательстве имеет лишь вспомогательное, а не решающее значение. Во-вторых, упомянутое резкое расхождение чертежа с утверждениями неевклидовой геометрии так сильно бросается в глаза только потому, что чертеж пришлось сделать на небольшом клочке бумаги и заботиться о его отчетливости; если же расстояние AB увеличить во много раз, а $\angle MAP$ при этом во много раз уменьшить, то такого „очевидного“ расхождения уже не будет. В-третьих, можно пойти еще дальше и допустить, что в реальном пространстве, законам которого мы необходимо подчиняемся, выполняя чертеж с помощью известных приборов, господствует геометрия Евклида; тогда безусловно верных чертежей для иной геометрии получить не удастся. Однако нам остается и в этом случае возможность мыслить и изучать геометрию Лобачевского, как отвлеченно-логическую систему истин, необходимо вытекающих из принятых предпосылок. Мы можем изучать ее, совершенно не заботясь о ее практическом воплощении в окружающем

нас действительном пространстве. Вопрос об истинных свойствах последнего — далеко не простой вопрос, но он во всяком случае не может быть решен средствами одной чистой математики. Отвлеченно строить мы можем различные системы геометрии; но чтобы одну из них навязать миру опыта, нужно выслушать свидетельства этого опыта.

Путь, выбранный Лобачевским, должен был привести к решению 2000-летнего вопроса о V-м постулате. Действительно, если этот постулат можно доказать с помощью других аксиом геометрии, то система Лобачевского, утверждающая эти последние аксиомы и отрицающая V-й постулат, рано или поздно должна привести к противоречию. Наоборот, если геометрия Лобачевского окажется возможной, т.-е. не заключающей в себе внутренних противоречий, то, значит, отрицание V-го постулата вполне совместимо с утверждением остальных аксиом; ясное дело, что в таком случае V-й постулат нельзя доказать с их помощью.

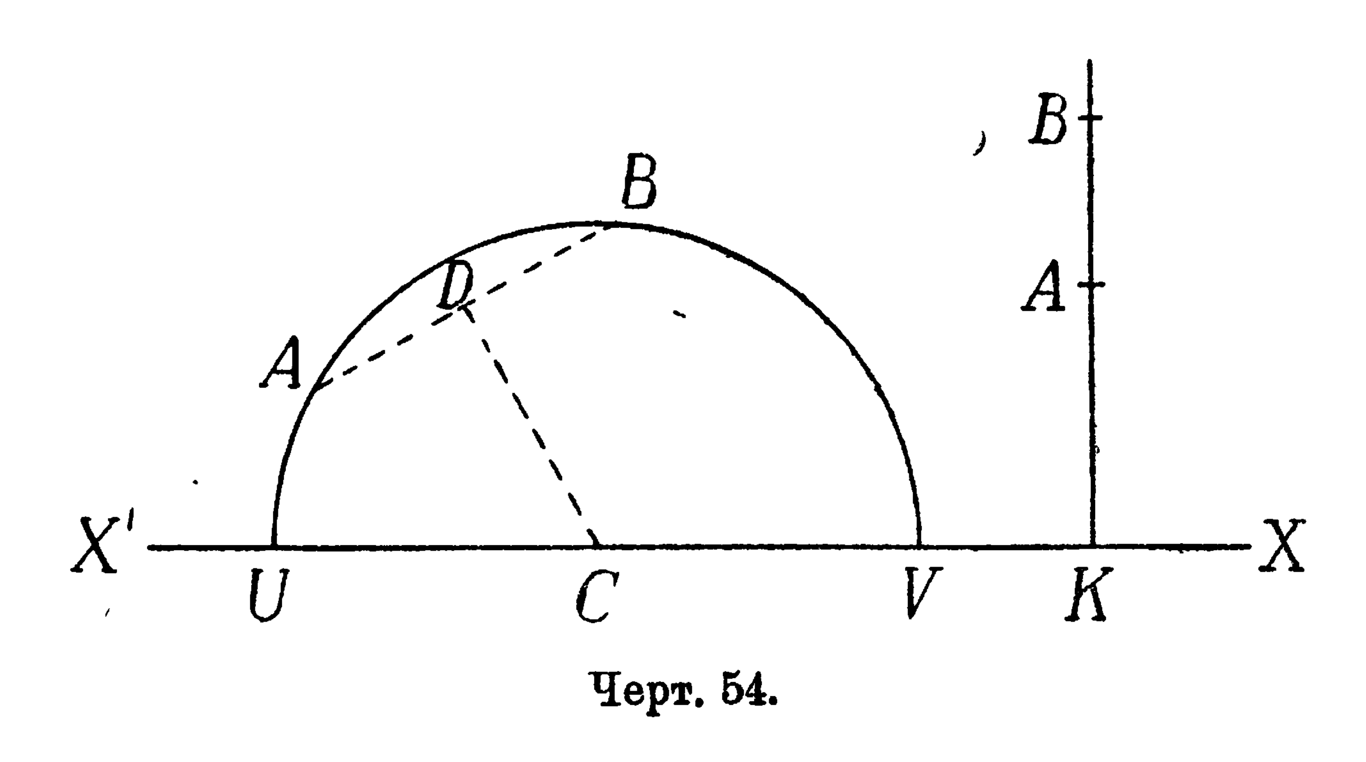
Таким образом мы приходим к необходимости доказать, что в геометрии Лобачевского нет внутренних противоречий. Это требуется и по другим соображениям, которые были ясны уже самому творцу неевклидовой геометрии. Дело в том, что многие предложения Лобачевского весьма резко расходятся с соответственными теоремами Евклида и это совершенно понятно, ибо речь идет о различных геометриях, исходящих из различных систем предпосылок. Но указанное противоречие с нашими пространственными представлениями, воспитанными на системе Евклида, так живо и неприятно воспринимается нами, что многие думали об уже полученном логическом противоречии. Вопрос, конечно, требует самого тщательного рассмотрения. Лобачевский развил свою геометрию в объеме не только школьного, но и университетского курса, и нигде не натолкнулся на противоречие. Однако из того, что

противоречий до сих пор не получено, еще не следует, что их и впредь не будет; следовательно особое исследование указанного вопроса остается все-таки необходимым.

В современных исследованиях по основаниям геометрии авторы довольно часто встречаются с необходимостью доказательства, что данная совокупность предложений не может, при своем развитии, привести к противоречию; т.-е., рассуждая правильно, мы никогда не выведем из данной совокупности двух утверждений, противоречащих друг другу. В общих чертах, метод доказательства состоит в том, что исследуемая система связывается с такой системой истин, относительно которой уже известно, что она свободна от противоречий. В частности, возможность геометрии Лобачевского доказывается тем путем, что в геометрии Евклида отыскиваются такие образы, между которыми господствуют как раз те же самые отношения, какие имеют место между прямыми в геометрии Лобачевского (мы имеем в виду, ради простоты, ограничиться планиметрией). Тогда неевклидова геометрия таким образом связывается с евклидовой геометрией, что противоречие в первой сейчас же сказалось бы противоречием в последней; а потому всякий, кто признает логическую состоятельность системы Евклида, должен признать и возможность геометрии Лобачевского.

Мы познакомим сейчас читателя — конечно, в самых общих чертах — с тем методом, который предложил покойный выдающийся французский математик А. Пуэнкарэ; как уже было отмечено, мы ограничимся доказательством отсутствия противоречий в планиметрии Лобачевского. Возьмем плоскость евклидовой геометрии и проведем в ней прямую $X'X$ (черт. 54), которая делит плоскость на две полуплоскости и называется осью; в верхней полуплоскости мы найдем те соотношения, которые характеризуют геометрию Лобачевского. Но только те соотноше-

ния, которые господствуют между точками и прямыми в плоскости неевклидовой геометрии, в нашей полуплоскости имеют место между точками и некоторыми другими фигурами (а не прямыми). Именно, роль прямых здесь сыграют полуокружности с центрами на оси (см. черт. 54) и, как их предельные случаи, — полупрямые, перпендикулярные к оси; эти фигуры условимся называть „прямыми" (в кавычках). Надо доказать, что свойства прямых в планиметрии Лобачевского совпадают со свойствами „прямых" (в кавычках) в евклидовой полуплоскости; достаточно будет проделать эту работу лишь для аксиом неевклидовой планиметрии, ибо все остальные предложения являются их логическими следствиями. Не входя в бо̀льшие подробности, мы укажем несколько существенных моментов.

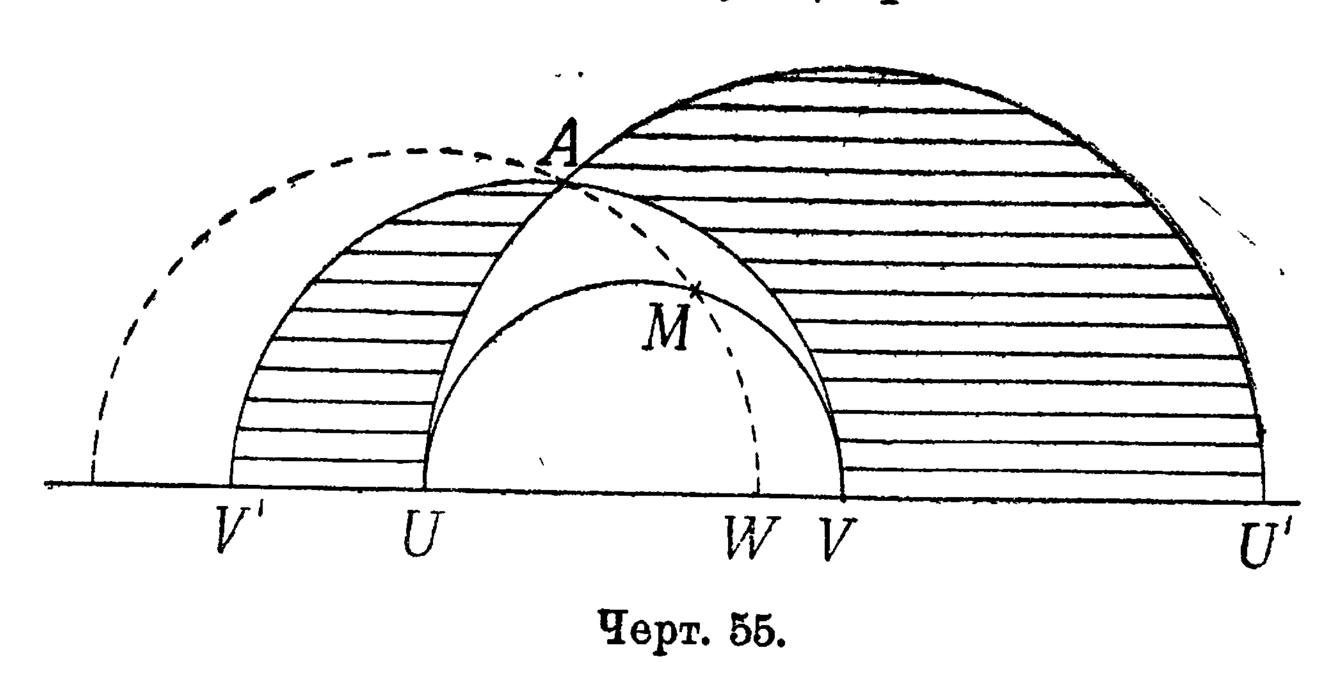


Черт. 54.

Одна из основных аксиом обеих геометрий гласит, что „две различные точки определяют одну и только одну проходящую через них прямую". Так как указанные полуокружности имеют центры на оси, то задание 2-х точек A и B вполне определит такую полуокружность; действительно, в середине отрезка AB восставляем $\perp$-р до пересечения его с осью в точке C (см. черт. 54); из точки C

описываем полуокружность радиусом $= CA$ (если этот $\perp$-р окажется параллельным оси, то вместо полуокружности получится полупрямая AB). Таким образом мы убеждаемся, что 2 точки вполне определяют „прямую“ (в кавычках).

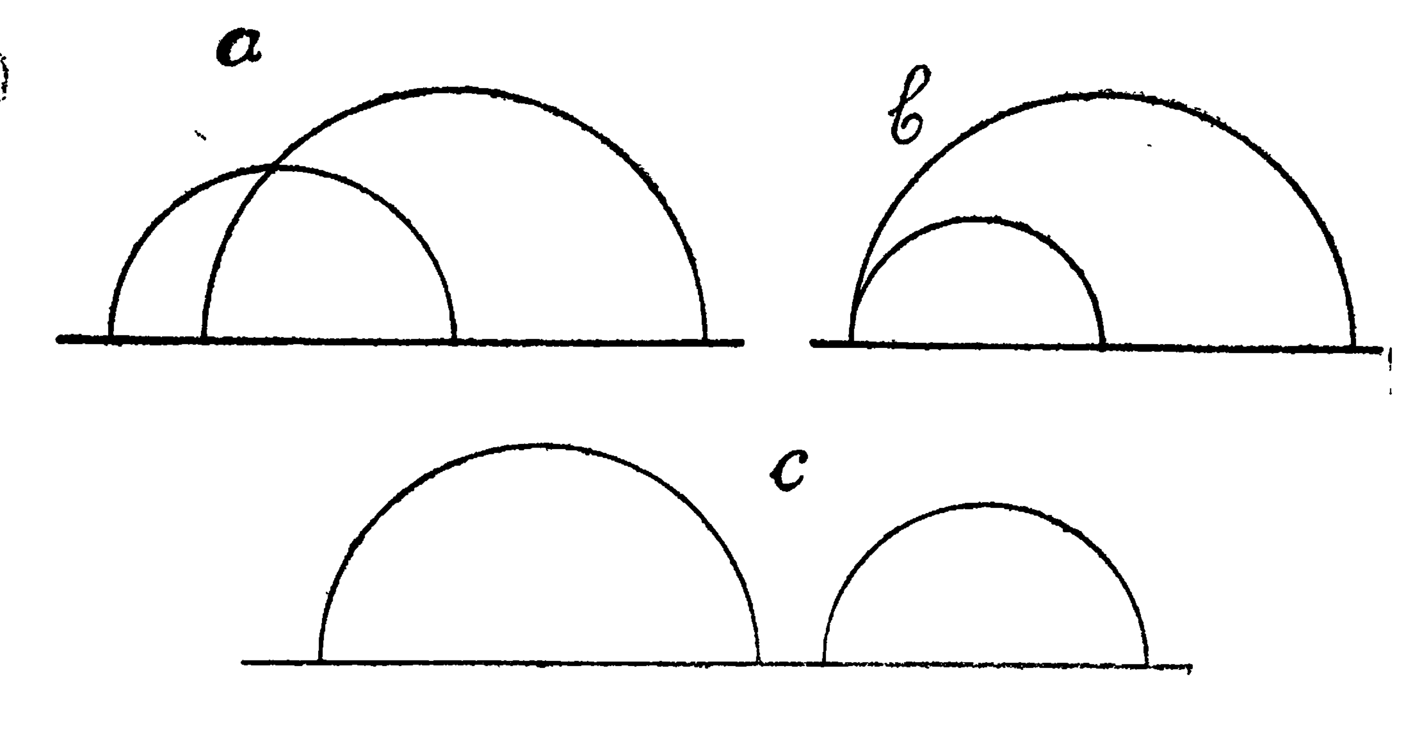
Не входя в разбор других аксиом, общих обеим геометриям, перейдем к вопросу, в котором сказывается их существенное различие; здесь придется построения и рассуждения, связанные с черт. 52 и 53, перенести на наши „прямые“ (в кавычках). Возьмем „прямую“ UMV (см. черт. 55) и вне ее — точку A; проведем из этой точки



Черт. 55.

какую-нибудь „прямую“ AMW, пересекающую данную в точке M. Пусть последняя точка перемещается по „прямой“ UMV, неограниченно сближаясь с ее „концом“ V; ясно, что переменная „прямая“ AMW будет стремиться к некоторому предельному положению, представляемому „прямою“ VAV'. Если же точка M будет перемещаться по данной „прямой“ в другом направлении, неограниченно сближаясь с другим ее „концом“ U, то предельным положением „прямой“ AMW будет „прямая“ UAU'. Две построенные „прямые“ VAV' и UAU' делят верхнюю полуплоскость на две части (одна из них на черт. 55 оставлена чистой, а другая слегка заштрихована); всякая „прямая“,

проходящая через A и лежащая в 1-й части, пересекает данную „прямую“, как, напр., полуокружность AMW; всякая же „прямая“, лежащая в заштрихованной части, не пересечет данной „прямой“. Следовательно в верхней полуплоскости вопрос о пересечении и непересечении „прямых“ решается совершенно так же, как и в геометрии Лобачевского; полуокружности UAU' и VAV' изображают при этом „прямые, параллельные“ данной. На черт. 56 мы



Черт. 56.

еще раз указываем различные случаи относительного расположения наших полуокружностей: случай *a* дает две „пересекающиеся прямые“, случай *b* — две „параллельные прямые“ и случай *b* — две „непересекающиеся прямые“.

Таким образом вся планиметрия Лобачевского истолковывается с помощью образов планиметрии Евклида, а потому она оказывается возможной в той же мере, что и последняя. Подобные же соображения можно развить и для стереометрии. Тем самым установлена недоказуемость V-го постулата при помощи остальных аксиом геометрии (не вводя новых). К различным попыткам доказать V-й постулат надо относиться так же, как к изобретению *perpetuum mobile*.

После того, как возможность геометрии Лобачевского установлена, нам остается ознакомить читателя с ее особенностями; с помощью предыдущих исследований некоторые из них вскрываются легко. Начнем с такого важного вопроса, как сумма углов Δ-ка. Теоремы Саккери-Лежандра говорят, что $S(\Delta) \leqslant 2d$ и что равенство этой суммы 2-м прямым углам равносильно постулату Евклида; отсюда сейчас вытекает теорема:

В геометрии Лобачевского сумма углов Δ-ка всегда меньше 2-х прямых углов.

Назовем разность между $2d$ и $S(\Delta)$ *недостатком Δ-ка* и введем для него след. обозначение:

$$2d - S(\Delta) = D(\Delta).$$

Обращаясь к черт. 44, где $\Delta\, ABC$ трансверсально разложен на 2 треугольника ADC и BDC, и вспоминая основное соотношение между их углами, пишем:

$$S(\Delta\, ADC) + S(\Delta\, BDC) = S(\Delta\, ABC) + 2d;$$

вычитая из $4d$ сначала левую, а потом правую часть равенства, получим равные остатки, так что:

$$[2d - S(\Delta\, ADC)] + [2d - S(\Delta\, BDC)] = 2d - S(\Delta\, ABC),$$

или:

$$D(\Delta\, ADC) + D(\Delta\, BDC) = D(\Delta\, ABC).$$

Таким образом недостаток всего Δ-ка равен сумме недостатков обеих частей его. Доказанное здесь предложение может быть обобщено, и в результате имеем:

Если треугольник разложен на частичные Δ-ки, то его недостаток равен сумме недостатков всех частей.

Отсюда сейчас же вытекает, что сумма углов целого Δ-ка меньше суммы углов частичного Δ-ка, ибо у целого

недостаток будет больше; это иногда выражают словами, что с возрастанием сторон Δ-ка сумма его углов уменьшается. Во всяком случае в неевклидовой геометрии сумма углов Δ-ка не является постоянной величиной, как в геометрии Евклида.

Последняя теорема о недостатке позволяет связать с ним понятие о площади Δ-ка; именно доказывается, что площадь Δ-ка в неевклидовой геометрии измеряется его недостатком.

Наконец, свойство суммы углов приводит нас к совершенно новому случаю равенства Δ-ков. Известные нам случаи равенства Δ-ков переносятся и в геометрию Лобачевского, так как они не зависят от V-го постулата; но в неевклидовой системе имеется еще такой случай:

Если углы одного Δ-ка соответственно равны углам другого, то такие Δ-ки равны между собой.

Действительно, если бы допустить, что при равенстве углов стороны наших Δ-ков не были бы равны между собой, то по теореме Валлиса имел бы место постулат Евклида, что̀ невозможно, ибо мы рассматриваем сейчас геометрию Лобачевского.

Последняя теорема влечет за собою то следствие, что в неевклидовой системе нет учения о подобии: если углы у 2-х Δ-ков равны, то эти Δ-ки непременно равны. Отсюда, далее, вытекает, что стороны Δ-ка определяются через его углы (это видно и из формул тригонометрии Лобачевского); тогда как в геометрии Евклида никакую длину нельзя определить с помощью одних только углов.

Возвратимся к черт. 52 и 53; угол *BAM*, который параллельная из *A* образует с ⊥-ром, спущенным из этой точки на данную прямую, называется *углом параллельности*. Если обозначить расстояние *AB* через x, то этот угол будет некоторой функцией от x (в геометрии Евклида

угол параллельности всегда равен прямому углу); эту функцию Лобачевский обозначает символом:

$$\Pi(x).$$

Само собою понятно, что определение угла параллельности представляет одну из важнейших задач неевклидовой геометрии; путем довольно длинных рассуждений Лобачевский приходит к формуле:

$$tg\left\{\frac{1}{2}\Pi(x)\right\}=e^{-x},$$

где e есть постоянная, лежащая между 2 и 3 и играющая весьма важную роль в высшем анализе.

Из этой формулы мы извлечем некоторые следствия. Мы видим, что $\Pi(x)$ есть функция убывающая, т.-е. угол параллельности уменьшается при возрастании x и увеличивается при убывании x. В частности, если x беспредельно убывает, стремясь к пределу, равному нулю, то правая часть равенства стремится к 1; а если тангенс угла стремится к 1, то сам угол $\left\{\frac{1}{2}\Pi(x)\right\}$ приближается к 45°. Таким образом, при бесконечно-малом x, угол параллельности стремится к прямому углу, т.-е. к тому значению, которое он имеет в геометрии Евклида. Указанное обстоятельство выражают словами: *в бесконечно-малых частях пространства Лобачевского господствует геометрия Евклида.*

Здесь мы поставим точку, хотя указали очень небольшое число теорем неевклидовой геометрии: более подробное знакомство с ней требует отдельной книги. Тех из читателей, которые пожелают приобрести это более полное знакомство с геометрией Лобачевского, мы отсылаем к самим „Новым началам“ и к недавно вышедшей книге академика Я. В. Успенского „Введение в неевклидову геометрию Лобачевского—Болиаи“.

Сделанный выше подход к „полной теории параллельных“ показал, что в этом вопросе представляются только две возможности: постулат Евклида или постулат Лобачевского; и это действительно так, поскольку мы сохраняем в неприкосновенности все остальные аксиомы геометрии (читатель благоволит вспомнить ту точку зрения, с которой мы подошли к упомянутому исследованию). Но если последнее ограничение отбросить, то с общелогической точки зрения в рассматриваемом вопросе представляются вообще 3 возможности: 1) только одна прямая пучка *A* не пересекает прямой *a* (черт. 53), 2) таких прямых имеется больше одной, и 3) таких прямых нет ни одной. Первые две возможности уже развиты в законченные геометрические системы; нельзя ли того же самого сделать с третьей?

Прежде всего ясно, что если это и возможно, то переход от евклидовой геометрии к новой, 2-й по счету, неевклидовой не будет таким же простым, как от геометрии Евклида — к геометрии Лобачевского. В этом последнем случае надо было только изменить предпосылку, лежащую в основе учения о параллельных, оставив в неприкосновенности все остальные аксиомы; тогда как при новом намечающемся переходе придется внести более глубокие изменения в систему аксиом. В самом деле, если мы примем предпосылку, что всякие две прямые одной плоскости пересекаются, то, значит, и два перпендикуляра к одной и той же прямой (в одной плоскости) будут иметь общую точку; тогда получим Δ-к, в котором уже сумма 2-х углов будет равняться $2d$, и т. д. Таким образом мы приходим к предложениям, противоречащим теоремам, общим для геометрий Евклида и Лобачевского и основанным на аксиомах, которые вводятся в самом начале курса — задолго до подхода к учению о параллельных прямых.

Отсюда, далее, вытекает, что если мы все-таки желаем

развить и „третью возможность" в вопросе о параллельных, то придется изменить и другие аксиомы, кроме V-го постулата. В чем состоит сущность этих изменений, — нам нетрудно будет понять после знакомства с проективной геометрией. Действительно, приняв предпосылку о пересечении всяких 2-х прямых одной плоскости, мы придем к тем самым соотношениям, которые имели место в проективной геометрии (после введения несобственных элементов); эти соотношения влекут за собой то следствие, что прямая является замкнутым рядом точек (см. стр. 61—62). Итак, желая развивать 3-ю возможность, мы должны признать замкнутость прямой, выразив это в соответствующих аксиомах; вот то существенное изменение, которое придется дополнительно сделать, чтобы построить вторую неевклидову геометрию.

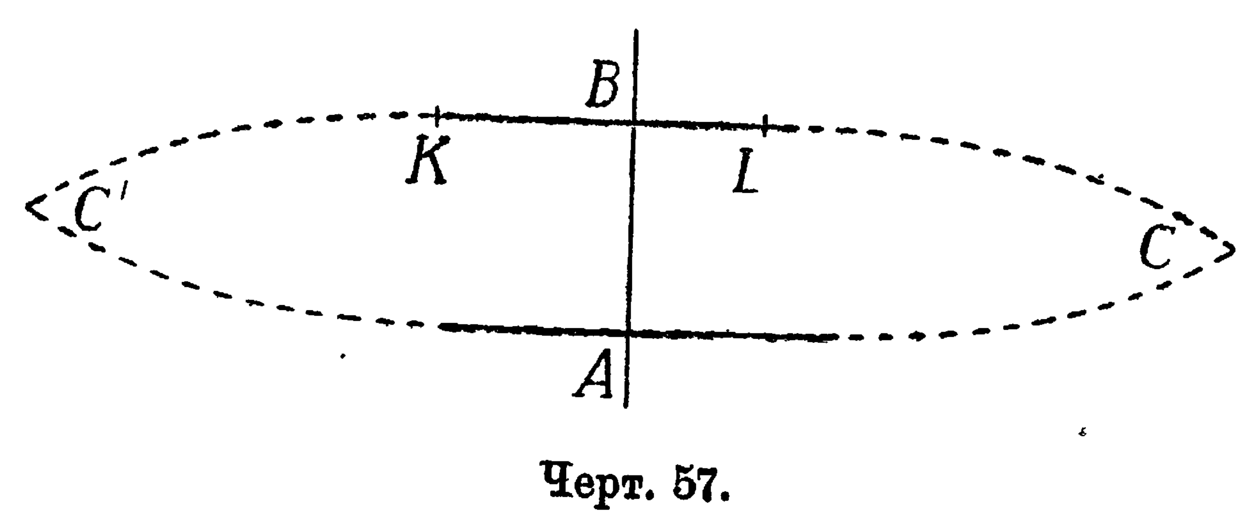
Замкнутая прямая имеет конечную длину, и отсюда проистекает то следствие, что все пространство имеет конечные размеры. С этим выводом не хотели примириться прежние авторы; считая бесконечные размеры пространства его неотъемлемым свойством, они всякий раз решительно отвергали 3-ю возможность, если в своих исследованиях им случалось подходить к ней. Однако, не говоря уже о том, что гипотезу конечного пространства во всяком случае можно исследовать, как отвлеченно-логическую возможность, оказывается, что бесконечность пространства вовсе не является необходимой составной частью нашего представления о пространстве. Немецкий геометр Риман, впервые указавший (1854 г.) на возможность другой неевклидовой геометрии, разрушил этот предрассудок; в его знаменитой диссертации „О гипотезах, лежащих в основании геометрии"*) находим следующие

*) Перевод напечатан в казанском сборнике „Об основаниях геометрии", изданном к юбилею Лобачевского (1893 г.).

соображения. В интересующем нас вопросе о свойствах пространства надо различать два понятия: *безграничность* и *бесконечность;* первое—качественного характера, второе—количественного. Мы мыслим пространство так, что для каждой его части имеются со всех сторон смежные части; невозможно представить себе какую-то границу, за которой уже не было бы пространства. В этом заключается сущность понятия о безграничности, которое действительно является неотъемлемой частью нашего представления о пространстве. Что же касается до бесконечности, то это понятие относится до размеров пространства и вовсе не связано неразрывным образом с его безграничностью. Пространство может быть и безгранично и бесконечно; таково обыкновенное евклидово пространство, являющееся идеализацией пространства нашего представления. Но, на ряду с этим, возможно существование такого пространства, которое, будучи безграничным, оказалось бы конечным. Представить себе наглядно такое конечное пространство 3-х измерений — задача, превышающая наши силы (по крайней мере при современном развитии способности воображения); другое дело — пространства 2-х измерений или поверхности, известные нам в весьма большом разнообразии. Возьмем, именно, поверхность шара; это пространство 2-х измерений несомненно обладает безграничностью: для каждой части его существуют смежные части, и, перемещаясь по поверхности шара, мы нигде не натолкнемся ни на какую границу; между тем размеры рассматриваемого пространства — конечны: всякий школьник сумеет определить величину поверхности шара. Таким образом уже на этом примере выясняется, что в соединении понятий „безграничности“ и „конечности“ не заключается логического противоречия; по этому исследование третьей возможности вовсе не ставит нас перед каким-то нелепым понятием о пространстве. Остаются, быть-может, все-таки

серьезные трудности для представления риманова пространства; но Ньюкомб, один из первых исследователей в области *римановой геометрии*, остроумно замечает, что, пожалуй, не меньше трудности представляла в свое время задача вообразить антиподов, ходящих головою вниз с нашей точки зрения!

Геометрия Римана, в которой нет параллельных прямых, а прямая является замкнутой линией, сама раздваивается на две различные формы; небольшое рассуждение уяснит нам суть дела. Пусть в некоторой плоскости к прямой AB в точках A и B восставлены перпендикуляры (черт. 57); согласно с основным положением гео-



Черт. 57.

метрии Римана, они пересекутся в некоторой точке C. Но если такая точка существует справа от AB, то, в силу симметрии всей фигуры относительно прямой AB, и слева от этой прямой должна существовать точка пересечения C'. Теперь мыслимы два различных случая:

1) *Обе точки пересечения C и C' совпадают в одну.* Тогда наши перпендикуляры пересекаются только в одной точке, и таким образом сохраняется это основное свойство прямых. Но зато здесь теряется свойство прямой делить плоскость на 2 раздельные части; так, от точки K к точке L можно перейти путем, не пересекающим AB, а проходящим через слившиеся точки C и C'. Читатель не должен смущаться тем, что на чертеже нельзя изобразить слияние

этих точек: ведь чертеж занимает весьма ограниченное пространство; а между тем нечто подобное произойдет с двумя путниками, которые разойдутся в разные стороны по земному экватору. Во всяком случае такое положение дела мыслимо без страха впасть в явное противоречие, а это — все, что нам сейчас нужно. Разбираемая форма геометрии Римана была названа Клейном, первым указавшим на ее возможность, — *эллиптической.*

2) *Точки пересечения C и C′ — различны.*

В таком случае теряется свойство 2-х точек определять только одну прямую; некоторые пары точек (напр., C и C') определяют не одну, а даже бесчисленное множество различных прямых. Зато сохраняется свойство прямой делить плоскость на 2 раздельные части. Действительно, если взять те же точки K и L, то теперь прямые KL и AB, подобно вышеупомянутым перпендикулярам, пересекутся в 2-х различных точках; одна из них B принадлежит одному отрезку KL, другая — другому отрезку KL (ведь надо вспомнить, что точки K и L делят замкнутую прямую KL на 2 отрезка), так что от одной из этих точек нельзя перейти к другой, не пересекая AB. Такую форму геометрии Римана Клейн назвал *сферической.*

Обе формы одинаково мыслимы (сейчас мы войдем в некоторые подробности), и Киллинг доказал, что других случаев в римановой геометрии не может быть. Но, чтобы доказать возможность каждой формы, т.-е. установить, что каждая из них застрахована от противоречий, — необходимо провести рассуждение, подобное тому, посредством которого была доказана логическая состоятельность геометрии Лобачевского.

Возьмем сферическую систему и, рассматривая ее просто, как известную систему отвлеченных истин, докажем, что правильные выводы из них никогда не при-

ведут нас к противоречию. Метод будет прежний: мы найдем истолкование соотношений римановой геометрии на некоторых образах геометрии Евклида; здесь дело гораздо проще, чем при истолковании геометрии Лобачевского по методу Пуэнкарэ.

С целью истолковать планиметрию сферической системы, возьмем поверхность евклидова шара, так что под „точками" здесь будут пониматься точки указанной поверхности; но „прямыми" условимся называть окружности больших кругов, лежащих на данном шаре. Этими названиями мы хотим сказать, что между точками и прямыми (одной плоскости) в сферической системе господствуют те же самые отношения, которые имеют место между точками и большими кругами на поверхности шара в евклидовой геометрии. Проверим это утверждение на нескольких основных предпосылках сферической геометрии. Действительно, две окружности больших кругов всегда пересекаются в 2-х различных точках, как это имеет место с прямыми рассматриваемой неевклидовой геометрии; окружность есть линия замкнутая; всякие 2 окружности больших кругов пересекаются на шаре, что̀ соответствует отсутствию параллельных, и т. д. Таким образом сферическая система отображается на поверхности шара в геометрии Евклида, а потому первая застрахована от противоречий в той же мере, что и последняя. Зная геометрию на поверхности шара, можно, при известных условиях, обратно сделать некоторые заключения о сферической системе; таким путем можно, напр., получить предложение, что в этой системе сумма углов Δ-ка больше 2-х прямых углов; и это является как раз 3-ей возможностью в рассматриваемом вопросе (1-я теорема Саккери-Лежандра исключила эту возможность при помощи тех аксиом, которые уже не имеют места в геометрии Римана). Словом, читатель убедится без труда, что в тайны

сферической системы ему проникнуть гораздо легче, чем в геометрию Лобачевского.

Что касается эллиптической системы, то ее возможность можно доказать посредством истолкования ее в евклидовой связке („точка“ — прямая связки, „прямая“ — плоскость связки, и т. д.). Познакомиться с подробностями доказательства, равно как и с некоторыми интересными особенностями эллиптической системы, читатель может в другой нашей работе *).

Едва ли нужно настаивать на том, что построение неевклидовых систем должно было создать эпоху в развитии геометрии. Прежде всего появились 3 различные геометрии, одинаково состоятельные с отвлеченно-логической точки зрения; если до того на геометрию смотрели как на науку о свойствах реального пространства, то теперь узость этого определения стала очевидной: под него могла подойти самое большее одна из 3-х геометрий. Отныне неразрывная связь между геометрией и пространством нашего опыта потеряла свою необходимость.

Конечно, все-таки интересно спросить, какая же из 3-х геометрий выражает свойства реального пространства? Вопрос этот — не простой; не входя в подробности, заметим, что, распоряжаясь некоторой постоянной, входящей в формулы неевклидовых геометрий, можно достигнуть того, что результаты вычислений по этим формулам будут сколь угодно мало отличаться от результатов, полученных по формулам евклидовой геометрии. Поэтому Пуэнкарэ полагал, что, в сущности, любую из указанных 3-х геометрий можно положить в основу изучения природы; но, конечно, следует предпочесть евклидову, как простейшую. В самое последнее время общий принцип относительности Эйнштейна приводит к выводу, что

---

*) „Основания геометрии“ (Госиздат, 1923 г.).

именно обобщенная геометрия Римана выражает действительные свойства пространства. Если этот принцип получит полное подтверждение, то мы придем к весьма замечательному решению вопроса об истинных свойствах пространства.

Далее, исследования в области неевклидовой геометрии чрезвычайно резко выявили логическую зависимость предложений геометрии от исходных ее предпосылок: стоило изменить одну единственную аксиому,—и вся картина резко меняется. Кроме того, в этих необычных условиях геометр мог найти весьма мало опоры в своем пространственном представлении; наоборот, оно могло подчас сбить его с правильного пути. Чтобы найти правильный выход, геометр должен был больше, чем в привычной нам евклидовой геометрии, придерживаться строгой логической последовательности мыслей, не рассчитывая на непосредственную очевидность. Все это выдвигало на первый план чисто-логическую сторону дела и подготовило те современные исследования, о которых будет речь в следующей главе.

VI. Геометрия как отвлеченно-логическая система.

В течение XIX столетия в области геометрии произошло два важных события; мы имеем в виду создание новых отраслей нашей науки: проективной геометрии и неевклидовой геометрии. В главах IV и V мы видели, как эти две новые дисциплины освещали и углубляли вопрос об аксиомах и методе геометрии; следствием было то, что к концу столетия создалась обширная и значительная литература, посвященная основаниям геометрии.

Общий план построения геометрии был выяснен в главе II. В основе геометрии лежат несколько перво-

начальных понятий, принимаемых без определения, и несколько аксиом, принимаемых без доказательства. Основная заповедь гласит, что всякое геометрическое понятие должно быть или открыто помещено в число основных, или отчетливо определено с помощью основных; точно так же каждое геометрическое предложение должно быть или открыто помещено в число аксиом, или строго доказано на основании аксиом. Мы должны неуклонно соблюдать эти правила, если желаем получить строго-научное обоснование геометрии. Там же мы видели, что весь смысл некоторых доказательств заключается в установлении логической связи между различными предложениями геометрии и в выяснении, благодаря этому, ее внутреннего строения.

Указанный идеал обоснования геометрии предносился уже мысленному взору древних геометров; но к осуществлению его значительно приблизилось лишь новейшее время. Разбирая I-е предложение „Начал“, было выяснено, что строгая в общем последовательность доказательства нарушается одним логическим скачком: факт пересечения обеих окружностей, хотя и верный по существу, однако логически не обоснован. Оправдывать автора указанием на простоту и очевидность утверждения — едва ли возможно; не говоря уже о том, что здесь нарушается приведенная выше основная заповедь, ибо появляется утверждение, которое не есть ни аксиома ни теорема, — сам Евклид считал нужным сопровождать соответствующими ссылками на постулаты еще более простые утверждения как, напр.: построение окружности при данном центре и радиусе, соединение отрезком 2-х точек и т. п. Чтобы вполне обосновать пересечение окружностей, надо было или открыто поместить это утверждение в число постулатов, или вывести его из более общей аксиомы, говорящей о непрерывности геометрических образов. Формулировка

такой аксиомы является одним из успехов XIX века; совокупность же предпосылок Евклида была явно недостаточна для строго-логического построения геометрии. Непреходящая заслуга его — в том, что он отчетливо указал идеал этого построения; но полное осуществление идеала, пожалуй, и теперь еще является делом будущего.

Недостатки, подмеченные у Евклида, присущи целому ряду курсов и трактатов по геометрии, за исключением разве нескольких книг, относящихся к самому последнему времени. Везде открыто указывается лишь небольшое число аксиом; остальные скрытым образом и в неопределенном количестве вводятся в течение рассуждений. Везде логическая цепь умозаключений время от времени прерывается утверждением, истинность которого, правда, непосредственно усматривается, но не может быть логически обоснована. Такое непосредственное усмотрение истинности некоторых геометрических утверждений получило в нашей литературе название *интуиции.* Итак, к логике примешивается интуиция, и чистота геометрического метода нарушается.

Причиной такого положения дела является прежде всего отсутствие полного перечня аксиом. Анализ предложений геометрии не был еще доведен до конца, и еще не были выделены все ее недоказуемые предпосылки; поэтому призывы к интуиции были неизбежны. Так, напр., совершенно отсутствовала логическая обработка вопросов о расположении элементов (тогда как некоторые вопросы геометрии меры, напр., теоремы о равенстве треугольников, были разработаны уже в глубокой древности); сюда относятся такие факты, как расположение одной точки прямой между двумя другими, возможность для прямой пересечь только две стороны Δ-ка во внутренних точках и т. п. Во всех таких вопросах по необходимости разбирались только с помощью интуиции.

Но что можно возразить по существу против применения интуиции, помимо нарушения чистоты дедуктивного метода? Если интуиция в состоянии доставлять нам достоверное знание, то почему ею не пользоваться? Может-быть, даже следует пользоваться исключительно ею, потому что это — несомненно самый простой и короткий путь к познанию. Такое решение вопроса не было бы даже чем-то совершенно новым: древние индусы, желая доказать какую-нибудь теорему геометрии, делали соответствующий чертеж и сопровождали его одним единственным словом: „смотри!“. Затем, в новейшее время, известный философ Шопенгауэр требовал, чтобы геометрия излагалась в виде последовательности интуитивно-очевидных предложений; между прочим, в качестве примера, он приводил индусское доказательство пифагоровой теоремы, где на чертеже уже сделаны все необходимые построения и при внимательном рассматривании фигуры читатель может подметить, как из меньших квадратов можно составить больший.

Поэтому вопрос о достоверности интуиции весьма интересовал математиков, и они уделяли ему немало внимания; так, в работах гёттингенского проф. Ф. Клейна мы находим некоторые интересные соображения по возбужденному вопросу *).

Геометрическая интуиция не сводится к простому рассматриванию чертежа; не нужно, напр., никакого чертежа для постижения той истины, что прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности и лежащая в ее плоскости, пересекает окружность в 2-х точках. Так обстоит дело в простейших случаях; но в более сложных

*) Подробное обсуждение вопросов, связанных с интуицией в области геометрии, читатель может найти в книге автора „Вопросы обоснования геометрии“; там же указание литературы.

интуиция ищет опоры в чертеже, хотя и не сводится к простому созерцанию этой частной фигуры; таково, напр., индусское доказательство теоремы Пифагора. Но во всяком случае геометрическая интуиция тесно связана с нашей способностью мысленно воспроизводить геометрические фигуры; и таким образом вопрос сводится к тому, насколько силы этого пространственного воображения соответствуют требованиям точности и определенности, предъявляемым чистой математикой.

Небольшое размышление уже покажет, что эти две способности — пространственное воображение и логическое мышление — не стоят на одном и том же уровне. Читатель помнит, конечно, как просто определяются параллельные прямые в евклидовой геометрии; но пусть он попытается отчетливо представить себе 2 прямые, которые *нигде* в безграничном пространстве не пересекаются, находясь на одном и том же расстоянии друг от друга. Едва ли ему удастся сделать это с такой определенностью, чтобы можно было выводить отсюда различные теоремы о параллелях. Особенно веские доводы дает нам высшая математика; здесь мы встречаем много кривых, изучаемых без особого труда с помощью их рассудочного определения, но таких, что пространственное представление их оказывается для нас непосильным. Один знаменитый вопрос из области дифференциального исчисления показывает даже, что подчас интуиция способна ввести нас в заблуждение. Действительно, если вообразим себе какую-нибудь непрерывную линию, то, повидимому, довольно ясно можем усмотреть, что эта кривая в любой точке имеет касательную; между тем в 60-х годах прошлого столетия выдающийся немецкий математик Вейерштрасс указал кривую, которая ни в одной точке не имеет касательной. Ясное дело, что перед такими образами чистой математики наша интуиция совершенно бессильна.

Таким образом не только стремление к чистоте метода, но и желание найти вполне достоверный источник знания заставляет геометра строго придерживаться логической последовательности в доказательстве и постоянно помнить об указанной выше основной заповеди. Интуиция, чертежи, модели и вообще наглядность всякого рода могут применяться в геометрии в качестве вспомогательных средств; они имеют огромную наводящую силу, но им нельзя приписывать решающего значения, которое принадлежит лишь доказательству, построенному по правилам логики. Насколько может быть опасно неправильное пользование чертежом, — показывают известные геометрические парадоксы (как, напр.: все треугольники — равнобедренны); обыкновенно дело заключается в том, что правильное в общем рассуждение относится к заведомо неверному чертежу. Если войти в подробности, то можно подметить, что чертеж в таких случаях грешит в расположении элементов фигуры, т.-е. как раз в такой области, которая до последнего времени не была подвергнута логической обработке и была отдана в безраздельное владение интуиции. Отсутствие обязательных для всех теорем о расположении элементов и делает подчас нелегким уличить автора парадокса в погрешности.

Все изложенные соображения выдвигают в геометрии на первый план логические моменты рассуждения; а потому приобретают особенное значение аксиомы, как единственное основание геометрии, за исключением общеобязательных логических законов и начальных понятий о числе. Тем большее значение получает вопрос: что такое аксиомы и откуда они берутся? Есть одно довольно распространенное объяснение, по которому аксиомы геометрии выражают основные свойства пространства и доставляются нам интуицией пространства; таким образом, сделав вначале призыв к интуиции, в дальнейшем развитии гео-

метрии предоставляем уже полное господство логике. Проф. Клейн критикует это учение, исходя из установленной им же ограниченной точности интуиции. Благодаря этому обстоятельству интуиция может доставлять нам утверждения лишь приближенного характера, тогда как аксиомы геометрии высказывают свои утверждения в безусловно точном и всеобщем виде. Так, напр., одна из аксиом утверждает, что 2 различные точки всегда определяют одну проходящую через них прямую, и это утверждение относится к 2-м любым различным точкам, на каком бы расстоянии друг от друга они ни находились; между тем наше пространственное представление свидетельствует об этом факте со сколько-нибудь достаточной ясностью лишь в том случае, когда данные точки находятся друг от друга не слишком далеко и не слишком близко. По мнению немецкого ученого, интуиция пространства дает нам лишь грубый материал, который можно положить в основу геометрии, только устранив из него все неясное и неопределенное. Таким образом аксиомы геометрии, по Клейну, суть известные идеализации непосредственных данных интуиции.

В приведенном определении Клейна геометрия все-таки сохраняет связь с реальным пространством, хотя эта связь уже является весьма утонченной. Здесь мы видим отголосок прежних, более решительных воззрений на сей предмет. На вопрос: „что такое геометрия?“ — следовал ответ, что геометрия есть наука о свойствах пространства, при чем под последним термином не обинуясь понимали действительно существующее пространство, в котором мы живем и наблюдаем природу. Но такое определение могло держаться лишь до тех пор, пока была известна только одна геометрия Евклида; теперь же нам известны еще две неевклидовых геометрии, и так как самое большее одна из 3-х известных геометрий может

выражать „истинные свойства пространства“, то указанное выше определение геометрии не подходит даже и ко всем тем немногим случаям, которые мы до сих пор изучали. Следовательно новейшие открытия в области геометрии оторвали ее от реального пространства; в том же направлении действовал и все возраставший интерес к логическим вопросам, связанным с обоснованием геометрии. Однако несомненное зерно истины заключалось и в прежних воззрениях. Указанные противоречия удалось разрешить, рассматривая геометрию с двух различных точек зрения: *геометрия прикладная* изучает пространство нашего опыта и не может окончательно устанавливаться независимо от данных этого опыта; *геометрия чистая* ни о чем подобном не заботится и развивает логически стройную систему истин из *свободно* выбранных предпосылок. Эта свобода выбора подлежит, впрочем, известным, самим собою понятным ограничениям, о которых сейчас будет упомянуто; но, независимо от этого, не всегда будет одинаково целесообразно исследовать ту или другую систему предпосылок: различные системы будут иметь неодинаковое практическое и теоретическое значение. Так, среди возможных систем чистой геометрии, конечно, должна быть такая, которая исходит из предпосылок, являющихся идеализацией данных интуиции: ее практическое значение огромно, ибо она лежит в основе прикладной геометрии. Но, напр., геометрия Лобачевского заслуживает тщательного изучения, независимо от возможности ее практического применения: она глубоко освещает связь многих вопросов геометрии с учением о параллельных, и кроме того в руках Пуэнкарэ и Клейна она оказалась серьезным подспорьем в некоторых сложных вопросах теории функций. Для того, чтобы усмотреть системы предпосылок, могущих повести к практически или теоретически интересным геометриям, — нужен твор-

ческий акт мысли, которому логика не может научить: она вообще учит не тому, как открывать новые истины, а лишь тому, как их доказывать.

В дальнейшем мы будем иметь в виду геометрию чистую; ее аксиомы суть свободно (и целесообразно) устанавливаемые исходные предпосылки исследования. Однако, помимо целесообразности, свобода выбора аксиом подлежит и другим ограничениям обще-логического характера. Так, система аксиом должна быть *совместной*, другими словами — свободной от противоречий Едва ли кто-нибудь допустит такую грубую ошибку, как явное противоречие в системе аксиом; здесь имеется в виду более тонкое обстоятельство. Дело в том, что в аксиомах высказываются различные свойства геометрических образов: одни из них говорят о связи между основными образами, другие — о расположении элементов, третьи — о равенстве и т. д. Соединяя в системе аксиом свойства, относящиеся к различным областям геометрии, нельзя *a priori* быть уверенным в их согласуемости. Так, напр., если бы при обосновании геометрии Римана мы удержали аксиомы расположения в том виде, в каком они формулируются в евклидовой геометрии, то мы непременно пришли бы к противоречию; действительно, эти аксиомы характеризуют прямую как незамкнутую линию, а в геометрии Римана прямая есть линия замкнутая. Поэтому, говоря о совместности аксиом, имеют в виду утверждение, что никогда, даже при выводе из нее самых отдаленных следствий, нельзя натолкнуться на противоречие; предыдущий пример показывает, что такое требование не есть пустая придирка. Как именно устанавливается совместность данной системы аксиом, — некоторое понятие о том может дать приведенное выше доказательство возможности геометрии Лобачевского: ее возможность была доказана тем путем, что была установлена совместность соответствующей системы аксиом. Для

этого было указано истолкование соотношений геометрии Лобачевского с помощью образов геометрии Евклида, так что логическая возможность первой оказалась неразрывно связанной с логической возможностью второй. Вообще для того, чтобы доказать совместность данной системы предпосылок, ищут, с помощью подходящего истолкования входящих туда основных понятий, осуществления этих предпосылок в такой системе истин, совместность которых уже так или иначе установлена; в частности, для доказательства совместности геометрических аксиом, можно воспользоваться анализом.

Другое, не менее существенное требование, предъявляемое к системе аксиом, заключается в их *достаточности*. Под этим мы понимаем известную полноту и законченность системы аксиом, которая позволяет обосновать геометрию целиком, не прибегая к добавочным предпосылкам. Доказательством достаточности может послужить фактический ответ на все вопросы, возникающие в области геометрии. На основании соображений, которые мы не можем сейчас развить полностью, считают, что если дело доведено до начал аналитической геометрии, то данную систему аксиом можно считать достаточной. Так, например, если мы возьмем совокупность всех аксиом евклидовой геометрии, за исключением V-го постулата, то очевидно, что с такими средствами мы ответим далеко не на все вопросы геометрии; если же сюда присоединить аксиому параллелей, то можно довести дело, как известно, до аналитической геометрии.

Наконец, существует еще одно общее требование, не столь настоятельного характера, но необходимое для логического совершенства системы, как свидетельство о доведенном до конца анализе; это—*независимость* аксиом. Большинство авторов говорит о *порядковой* независимости, подразумевая под этим то, что ни одна из аксиом данной

системы не может быть доказана с помощью предыдущих. Таким образом каждая аксиома в тот момент, когда она впервые вводится, является совершенно необходимой, ибо это предложение нельзя доказать с помощью средств, имеющихся в нашем распоряжении в данный момент. Если же требование независимости не выполнено, то это значит лишь, что одно или несколько предложений помещены в число аксиом неправильно: их можно доказать с помощью других аксиом, а потому следует их перевести в число теорем. Однако неудовлетворение требованию независимости, свидетельствуя о некоторой незаконченности анализа основ геометрии, вовсе не имеет тех гибельных последствий, как, напр., неудовлетворение требованию совместности; более того, некоторые авторы сознательно отказываются от независимости аксиом, чтобы с помощью избыточных предпосылок упростить построение геометрии. Здесь уже перевешивают требования педагогического характера.

После этих общих замечаний мы перейдем к конкретной задаче ознакомить читателя с полным списком аксиом евклидовой геометрии, как они выяснились в результате исследований последнего времени; в основу будут положены работы германского профессора Гильберта и ряда итальянских ученых, как-то: Пеано, Вайляти и др. *). Гильберт разделил аксиомы геометрии на 5 групп, соединив в одну группу аксиомы, касающиеся однородных свойств геометрических образов; мы будем придерживаться в общем этого деления. Основные понятия тоже вводятся постепенно, по мере высказывания новых аксиом.

*) Работы итальянских ученых нашли отражение в сборнике: „Вопросы элементарной геометрии“ под общей ред. Энрикеса (имеется русский перевод); книга Гильберта „Grundlagen der Geometrie“ также переведена на русский язык.

I. *Аксиомы сочетания.*

Прежде всего здесь вводим 3 основных понятия:

„*точка*“, „*прямая*“, „*плоскость*“.

Раз эти понятия — основные, то, конечно, об их определении не может быть речи; однако мы можем указать, к каким логическим категориям они относятся (напр., элемент, класс, отношение); это уже вытекает из того употребления, которое делается в аксиомах из указанных терминов. „Точка“ есть просто название для простейших элементов, из которых геометрия строит свои фигуры, и ничего другого, кроме логического понятия об элементе, мы в этот термин не вкладываем. „Прямая“ и „плоскость“ суть классы точек; помимо этого общего указания на логическую категорию, мы ничего не утверждаем о названных классах — за исключением того, что будет сказано в аксиомах.

Теперь „пространство“ можно определить как совокупность всевозможных точек, а „геометрию“ — как науку о свойствах пространства.

Аксиомы I-й группы главным образом устанавливают различные связи или сочетания основных понятий, выражаемые термином „определять“:

I_1. *Две различные точки определяют одну и только одну проходящую через них прямую.*

Заметим, что выражения: „точка A лежит на прямой a“, или: „прямая a проходит через точку A“ обозначают лишь то, что точка A, как элемент, входит в состав класса точек, называемого прямою a; точно также слова: „прямые a и b пересекаются в точке M“ обозначают, что точка M является общим элементом обоих классов, и т. д.

I_2. *На прямой всегда имеются по крайней мере две различные точки.*

I_3. *Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют одну и только одну проходящую через них плоскость.*

I_4. *На плоскости всегда имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

I_5. *Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то эта прямая целиком лежит в указанной плоскости.*

I_6. *Если две плоскости имеют общую точку, то у них есть по крайней мере еще одна общая точка.*

I_7. *В пространстве имеются по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

На основании изложенных аксиом можно доказать несколько предложений того же характера („теоремы сочетания"); для примера докажем одно из них. Заметим, что точки принято обозначать большими буквами $A, B, C, \ldots$ латинского алфавита, прямые — малыми буквами $a, b, c, \ldots$ а плоскости — греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Теорема. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой и только по точкам этой прямой.

Пусть точка A является общей для плоскостей α и β; на основании акс. I_6, у этих плоскостей имеется еще одна общая точка B. Две точки A и B определяют прямую AB (акс. I_1), которая лежит в обеих данных плоскостях (акс. I_5). Таким образом данные плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Попробуем допустить, что у них имеется еще общая точка C, не лежащая на прямой AB; но три точки A, B, C определяют только одну проходящую через них плоскость (акс. I_3), а потому плоскости α и β должны совпасть в одну, что̀ противоречит заданию.

По всей вероятности, читатель не ощутил ни малейшего неудобства от того, что доказательство предыдущей теоремы не было снабжено чертежом. Здесь ясно видно, что чертеж имеет в геометрии лишь вспомогательное значение, хотя бы в более сложных случаях нам было трудно

обойтись без его помощи. Более того, чтобы понять изложенное доказательство, вовсе не нужно соединять с терминами: „точка“, „прямая“, „плоскость“ обычные пространственные представления этих основных фигур; нужно только держаться аксиом, совсем не заботясь о том, какое содержание может быть вложено в эти „пустые понятия“. Таким образом предыдущая простенькая теорема весьма пригодна для того, чтобы дать представление о геометрии, как об отвлеченно-логической системе истин, вытекающих из поставленных во главе аксиом и вовсе не связанных с представимым пространством.

II. *Аксиомы расположения.*

Сначала будет итти речь о расположении точек на прямой, и здесь мы введем новое основное понятие:

„*предшествовать в данном направлении*“;

условимся это понятие обозначать символом: *прш*. Здесь мы имеем дело с известным отношением между элементами того класса, который получил имя прямой; формальные свойства этого отношения будут указаны в нижеследующих 5 аксиомах. Предварительно, уже с помощью определения, вводим обратное отношение: „*следовать в данном направлении*“ (символ: *сл*); утверждая взаимную обратность отношений *прш* и *сл*, мы утверждаем лишь, что предложения:

„A прш B“ и „B сл A“

всегда равносильны друг другу.

Для точек любой прямой постулируем следующие аксиомы:

II_1. *Если A прш B, то B не прш A.*

II_2. *Если A прш B и B прш C, то A прш C.*

II_3. *Если A и B — различные точки, то либо A прш B, либо B прш A.*

II_4. *Если A и B — различные точки, то существует точка, следующая за одной из них и предшествующая другой.*

II_5. *Нет точки, которая предшествовала бы всем остальным, и нет точки, которая следовала бы за всеми остальными.*

Покажем приложение этих аксиом на определении отношения „между“ и понятия об отрезке. Пусть точка C следует за одной из точек A и B и предшествует другой; тогда говорят, что C лежит *между* A и B. Основное свойство этого нового отношения выражается следующим предложением:

Теорема. Из 3-х точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Как ни очевидно для нас это утверждение, оно должно быть доказано, раз его нет среди аксиом. Пусть на прямой даны 3 точки A, B, C; применим к точкам A и B аксиому II_3 и допустим для определенности, что:

$$A \text{ прш } B$$

(случай, когда B прш A, получается отсюда перестановкой букв A и B). Возьмем далее точки B и C; применяя акс. II_3, имеем 2 случая:

1) B прш C.

Указанное выше отношение „A прш B“ равносильно тому, что B сл A; таким образом B следует за A и предшествует C, т.-е. B лежит между A и C.

2) C прш B.

Здесь сразу ничего сказать нельзя, а потому надо рассмотреть отношение между точками A и C; акс. II_3 опять дает 2 случая:

2_1) A прш C.

Последнее утверждение равносильно тому, что C сл A; кроме того дано, что C прш B; следовательно C лежит между A и B.

2_2) C прш A.

Другими словами, — A сл C; а в самом начале было дано, что A прш B; следовательно A лежит между B и C.

Таким образом доказано, что одна из 3-х точек будет лежать между двумя другими; остается доказать единственность такой точки или несовместность рассмотренных случаев. Действительно, случай 1-й несовместим со случаем 2-м, ибо если B прш C, то C не прш B (акс. II_1); точно также несовместны подслучаи 2-го допущения.

Доказанная теорема снова дает хороший пример для формально-логического рассуждения, которое основывается лишь на введенных аксиомах и определениях и совершенно не заботится о том, что̀ понимается под терминами: „точка“, „прш“, „сл“ и т. п.

Владея понятием „между“, можно ввести понятие отрезка: *отрезком*, определяемым точками A и B, называется совокупность точек, лежащих между A и B, в соединении с самими этими точками. Указанный отрезок обозначаем символом (AB) (символ же AB обозначает всю прямую).

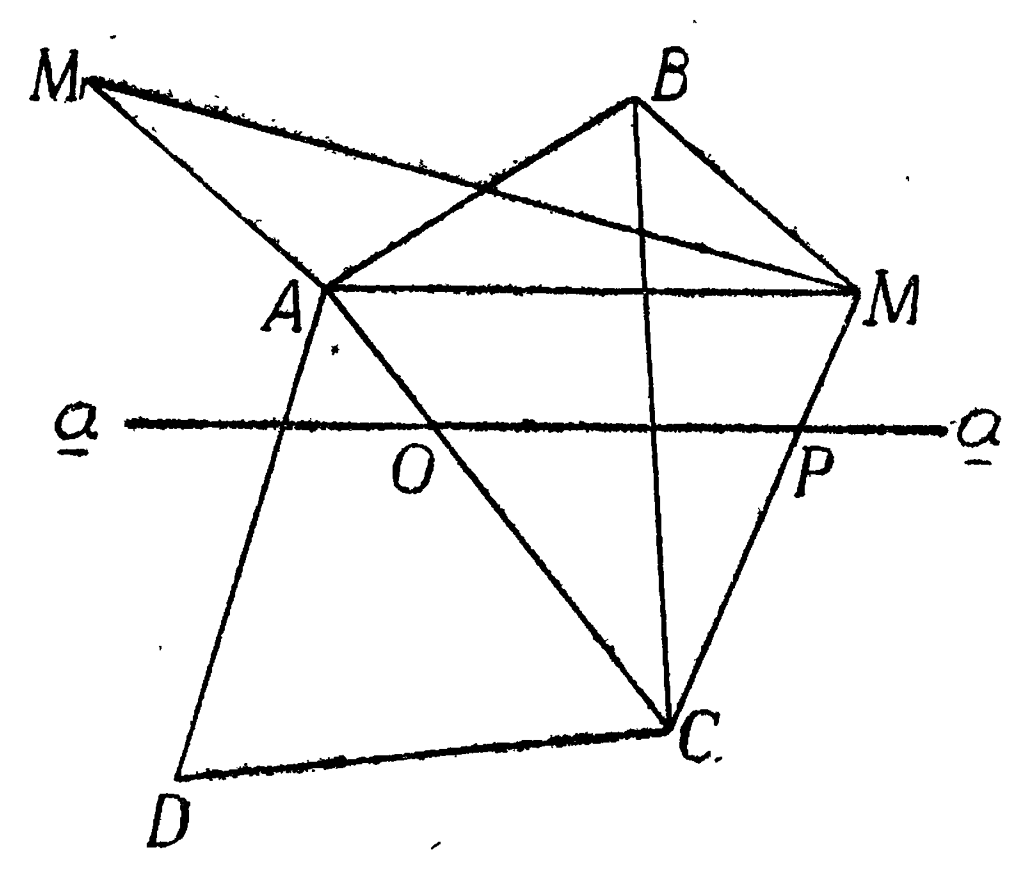
Не входя в дальнейшие подробности, заметим, что аксиомы 2-й группы определяют прямую как незамкнутый ряд точек, не имеющий ни начала ни конца и обладающий тем свойством, что между каждыми двумя его точками лежит еще точка *).

Вопрос о расположении точек на прямой вполне выяснен; чтобы определить расположение элементов на плоскости и в пространстве, надо ввести еще одну аксиому; ее обыкновенно называют *постулатом Паша*, по имени немецкого ученого, который был первым (1882 г.), логи-

*) За подробностями читатель может обратиться к книге автора „Вопросы обоснования геометрии“, глава 3-я: „Идея порядка в геометрии“.

чески обработавшим вопросы расположения. Постулат этот гласит:

$П_6$. *Пусть A, B, C суть 3 точки, не лежащие на одной прямой, и пусть a — прямая плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; тогда, если прямая a проходит через точку какого-нибудь одного из 3-х отрезков (AB), (BC), (CA), то она пройдет также через точку одного из 2-х остальных.*



Черт. 58.

В постулате Паша утверждается, что, при известных условиях, прямая *a* пересечет один из 2-х остальных отрезков; в добавление к нему можно уже доказать, что *a* пересечет *только один* отрезок из 2-х остальных. Заметив это, мы покажем применение постулата Паша к вопросу о делении плоскости прямой на 2 раздельные части.

Пусть в плоскости α задана прямая *a* (черт. 58; этот чертеж надо иметь в виду в течение ближайшего исследования); возьмем какие-нибудь две точки плоскости α, не лежащие на прямой *a*. Если соединяющий их отрезок не пересекается с прямою *a*, то говорят, что данные точки

лежат *по одну сторону* от прямой a (таковы, напр., точки: A и B, A и M, C и D); если же упомянутый отрезок пересекает a, то о точках говорят, что они лежат *по разные стороны* от прямой a (таковы, напр., точки: A и C, A и D, B и C).

Теорема. 1) Если A и B, A и M лежат по одну сторону от a, то B и M лежат также на одну сторону от нее;

2) Если A и B лежат по одну сторону, а A и C—по разные стороны от прямой a, то B и C лежат по разные стороны;

3) Если A и C, A и D лежат по разные стороны от a, то C и D лежат по одну сторону.

Перед нами находится предложение, в достаточной мере очевидное; но принимать его без доказательства, т.-е. в качестве новой аксиомы, нет надобности, ибо оно является логическим следствием уже сделанных допущений.

Для доказательства 1-го пункта применим постулат Паша к точкам A, B, M и прямой a; последняя не может пересекать отрезка (BM), так как в этом случае она пересекала бы либо (AB), либо (AM) (акс II_6), что противоречит заданию. Следовательно точки B и M лежат по одну сторону от a, что и требовалось доказать. Применение постулата Паша становится невозможным, если точки A, B, M лежат на одной прямой; но тогда наше утверждение следует из аксиом расположения, ибо один отрезок составляется из 2-х остальных.

Для 2-го пункта берем точки A, B, C и прямую a; согласно условиям теоремы, эта прямая пересекает отрезок (AC), но не пересекает отрезка (AB); следовательно она должна пересечь отрезок (BC) (II_6), что и требовалось доказать. Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то придется повторить сделанное выше замечание.

Наконец, в 3-м случае прямая a, пересекая отрезки (AC) и (AD), уже не может пересечь (CD) (вспомним доба-

вление о „только одном“ отрезке из 2-х остальных); следовательно точки C и D лежат по одну сторону от a, что и требовалось доказать.

Определение. Совокупность точек плоскости α, лежащих по одну и ту же сторону от a, называется ***полуплоскостью*** с ребром a.

Теорема. При данных плоскости и ребре, полуплоскость вполне определяется заданием одной из своих точек.

Действительно, пусть нам дана плоскость α и в ней прямая a; возьмем точку A в плоскости α, но не на прямой a (акс. I_4), и определим полуплоскость, содержащую эту точку. Указанную фигуру можно определить как совокупность таких точек M, что отрезок (AM) не пересекает прямой a, присоединив сюда и самое точку A. В самом деле, если точки M и M_1 обладают этим свойством, то a не может пересечь отрезка (MM_1) (акс. II_6), и, значит, мы имеем дело с совокупностью точек, лежащих по одну сторону от данной прямой. Но, если в основу положим какую-нибудь другую точку B рассматриваемой полуплоскости (следовательно отрезок (AB) не пересекает a), то придем ли к той же самой совокупности точёк? Применяя постулат Паша к точкам A, B, M и прямой a, приходим к заключению, что (BM) пересекает a тогда и только тогда, когда (AM) пересекает эту прямую; следовательно на поставленный выше вопрос получается утвердительный ответ, что и требовалось доказать.

На основании предыдущей теоремы, полуплоскость с ребром KL и содержащую точку N иногда обозначают с помощью символа $KL.N$.

Теорема. Всякая прямая a плоскости α делит ее на 2 полуплоскости, не имеющие других общих точек за исключением точек общего ребра a.

Пусть в плоскости α дана прямая a (черт. 58); отметим на последней какую-нибудь точку O (акс. I_2) и вне ее —

точку A (акс. I_4). Далее, на прямой AO возьмем такую точку C, чтобы O лежала между A и C; возможность этого вытекает из аксиомы II_5. Пусть теперь дана какая-нибудь точка M плоскости α, не лежащая на прямой a; применим постулат Паша (с добавлением) к точкам A, C, M и прямой a и убедимся, что либо (AM), либо (CM) не пересекают a. Следовательно точка M либо принадлежит полуплоскости $OP.A$ (OP — все равно, что a), либо полуплоскости $OP.C$; обеим им она принадлежать не может, опять-таки в силу расширенного постулата Паша, что и требовалось доказать.

Разобрав довольно подробно вопрос о делении плоскости прямою, мы наметим в кратких словах те вопросы геометрии, которые можно разобрать с помощью аксиом I-й и II-й групп. Мы можем теперь определить угол (напр., так: $\angle BAC$ есть совокупность точек, общих полуплоскостям $AB.C$ и $AC.B$) и изучить его свойства; затем даем определение треугольника (напр., так: ΔABC есть совокупность точек, общих полуплоскостям $AB.C$, $BC.A$, $CA.B$) и вообще ввести понятие о многоугольнике. Затем следует учение о двугранных углах, о многогранных углах, о многогранниках; но все эти фигуры рассматриваются здесь лишь с точки зрения геометрии положения: мы изучаем их как классы, составленные из точек, и рассматриваем расположение в них различных элементов*). Первые теоремы геометрии меры вносятся следующей группой аксиом, посвященной геометрическому равенству.

III. Аксиомы равенства.

Здесь вводятся еще два основных понятия, и они будут последними:

„равенство отрезков“ и *„равенство углов“*.

---

*) Подробности читатель найдет в тех книгах, которые были указаны выше.

Равенство есть известное отношение, свойства которого будут указаны в последующих аксиомах. Другие случаи равенства сводятся к указанным 2-м основным, которые принимаются без определения.

Аксиомы равенства таковы:

III_1. *Отрезок (угол) равен самому себе.*

III_2. *Если один отрезок (угол) равен другому, то этот последний равен первому.*

III_3. *Если один отрезок (угол) равен второму, а второй — третьему, то первый равен третьему.*

Высказанные 3 аксиомы выражают основные формальные свойства всякого равенства; они по порядку носят название *возвратности*, *взаимности* и *переносимости*. Две следующие аксиомы имеют дело исключительно с равенством отрезков:

III_4. *На каждом луче существует одна и только одна такая точка, что отрезок, определяемый ею вместе с вершиной луча,— равен данному отрезку.*

Это предложение иногда выражают короче: на каждом луче, от его вершины, можно отложить однозначным образом данный отрезок.

III_5. *Если точка C лежит между A и B, а точка C' — между A' и B', и если:*

$$(AC) = (A'C'),\ (CB) = (C'B'),$$

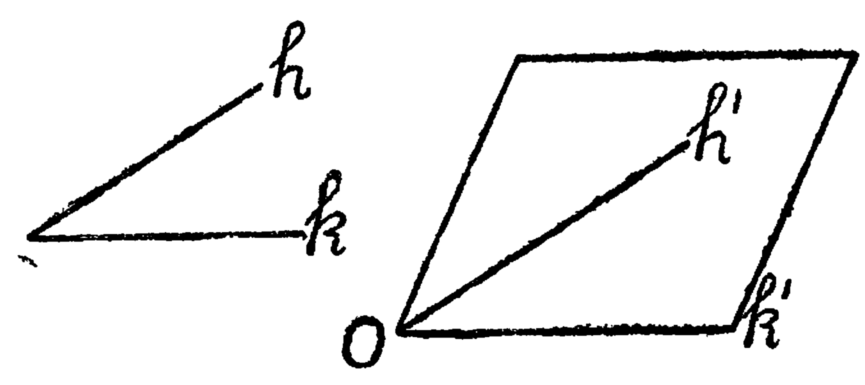
то и:

$$(AB) = (A'B').$$

Предвосхищая дальнейшее изложение, можно видеть смысл этой аксиомы в том, что „суммы равных отрезков равны“.

Высказанных аксиом достаточно, чтобы построить „исчисление отрезков“, т.-е. установить признаки сравнения, позволяющие ввести отношения „больше“ и „меньше“, определить сумму, кратное и т. д.

Следующая аксиома имеет уже дело с углами; угол будем обозначать с помощью лучей, служащих его сторонами, — подобно тому, как отрезок обозначается с помощью 2 точек, — и кроме того предлагаем читателю иметь в виду черт. 59:



Черт. 59.

III_6. *Дан угол* (hk) *и некоторая полуплоскость, причем на ее ребре заданы: точка* O *и определенный исходящий из нее луч* k'; *тогда в данной полуплоскости с вершиной в заданной точке существует один и только один такой луч* h', *что:*

$$\angle (h'k') = \angle (hk).$$

Подобно аксиоме III_4, здесь идет речь об однозначном откладывании (при известных условиях) данного угла.

Наконец, последняя аксиома III-й группы связывает равенство углов с равенством отрезков и является основанием для учения о геометрическом равенстве:

III_7. *Если в* Δ*-ах* ABC *и* $A'B'C'$ *имеем:*

$$(AB) = (A'B'),\ (AC) = (A'C'),\ \angle BAC = \angle B'A'C',$$

то всегда также будет:

$$\angle ABC = \angle A'B'C' \text{ и } \angle ACB = \angle A'C'B'.$$

Ввиде примера, мы докажем основную теорему о равенстве Δ-ков.

Определение. Два треугольника называются *равными*, если стороны и углы одного соответственно равны сторонам и углам другого.

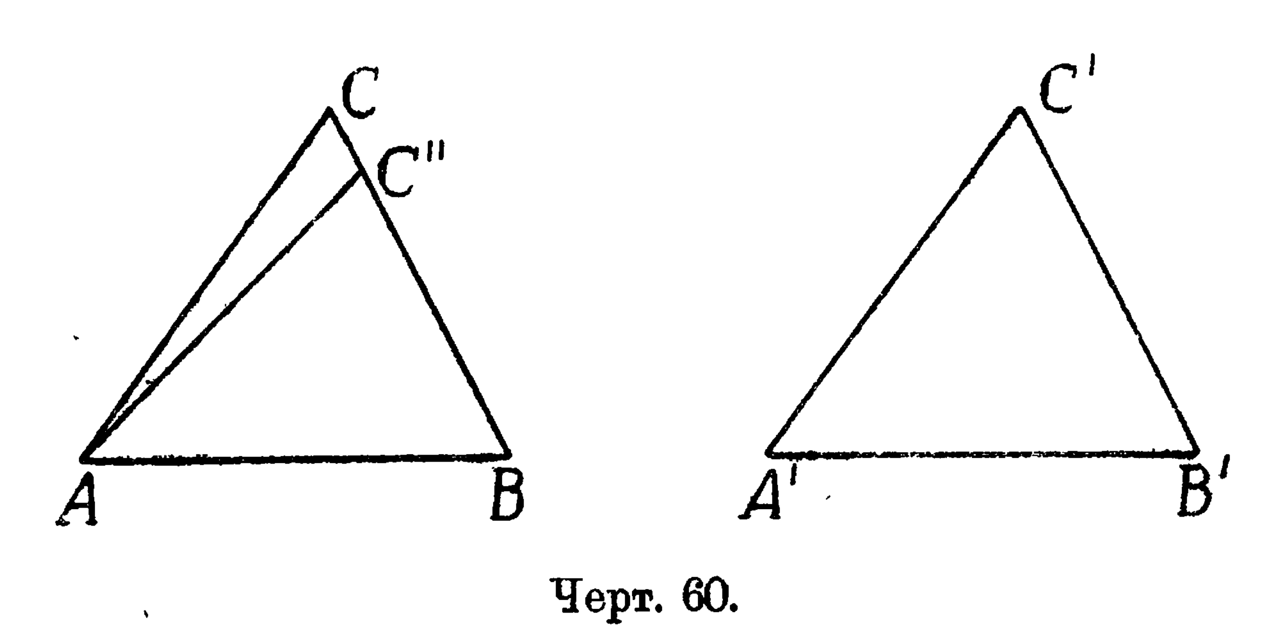
Теорема. Если 2 стороны и заключенный между ними угол одного Δ-ка соответственно равны 2-м сторонам и заключенному между ними углу другого Δ-ка, то такие треугольники равны.

Пусть, именно, в Δ-ках ABC и $A'B'C'$ имеем:

$$(AB) = (A'B'),\ (AC) = (A'C'),\ \angle BAC = \angle B'A'C' \text{ (черт. 60);}$$

аксиома III_7 сейчас же дает еще 2 равенства:

$$\angle ABC = \angle A'B'C' \text{ и } \angle ACB = \angle A'C'B'.$$



Черт. 60.

Остается доказать равенство сторон (BC) и $(B'C')$; попробуем допустить противное, и пусть для определенности будет $(BC) > (B'C')$. Тогда найдется отрезок $(BC'') = (B'C')$ и составляющий часть отрезка (BC); соединив C'' с A, построим еще Δ ABC''. Для Δ-ков $A'B'C'$ и ABC'' имеем:

$$(AB) = (A'B') \text{ (по данному)}$$

$$(BC'') = (B'C') \text{ (по построению).}$$

$$\angle ABC'' = \angle A'B'C' \text{ (по доказанному выше);}$$

а применяя сюда аксиому III_7, найдем:

$$\angle BAC'' = \angle B'A'C'.$$

Но нам дано, что:

$$\angle BAC = \angle B'A'C'.$$

Таким образом оказывается, что угол $B'A'C'$ двумя различными способами отложен в полуплоскости $AB.C$, а это противоречит аксиоме III_6. След.:

$(BC) = (B'C')$, и теорема доказана.

Далее с помощью групп I, II, III можно разобрать следующие вопросы: равенство Δ-ков и многоугольников, неравенства между элементами Δ-ка, свойства перпендикуляров и наклонных, основные свойства окружности и шаровой поверхности (кроме пересечения), перпендикулярные прямые и плоскости, равенство двугранных и многогранных углов.

Изложенный путь, очень близко примыкающий к Гильберту, совершенно не пользуется движением для обоснования учения о равенстве. Существуют, однако, другие пути, в которых понятие о движении как раз кладется в основу; так поступают, напр., итальянский ученый Пиери и проф. В. Ф. Каган. Названные авторы смотрят на движение, как на известное точечное преобразование пространства, и в соответствующих аксиомах перечисляют свойства этого преобразования; равными называются фигуры, получающиеся одна из другой с помощью некоторого движения. Оба пути — одинаково законны.

IV. Аксиома непрерывности.

У нас несомненно имеется некоторое представление о непрерывности геометрических образов; так, каждый согласится, что прямая и окружность — линии непрерывные. Это представление надо признать довольно смутным, ибо вопрос: „в чем заключается сущность геоме-

трической непрерывности?" — наверное затруднит человека, не занимавшегося специально учением о непрерывности. Тем не менее наше смутное представление о непрерывности может служить источником некоторых геометрических знаний. Так, напр., если человеку, даже мало знакомому с геометрией, поставить вопрос о пересечении окружности с прямою, которая имеет одну точку внутри окружности, а другую — вне (но в той же плоскости), то всякий ответит утвердительно о существовании общих точек. Что в основе такого ответа лежит представление о непрерывности указанных фигур, — можно убедиться при помощи следующего соображения. Вообразим себе, что окружность дана в виде прерывной линии, для грубого примера — в виде пунктирной линии; тогда наша прямая может пройти сквозь нее, не имея с ней общих точек.

Таким образом, при установлении некоторых теорем геометрии, не последнее значение имеет понятие о непрерывности основных геометрических образов; поэтому указанное понятие необходимо проанализировать и его геометрическую сущность выразить в виде особой аксиомы. Математики немало потрудились над этим вопросом, пока не появилась в 1858 г. небольшая статья Дедекинда: „Непрерывность и иррациональные числа". Выводы автора получили общее признание, а в настоящее время аксиому непрерывности обыкновенно формулируют по Дедекинду (исключением является вышеупомянутая работа Гильберта).

Рассматриваемая аксиома не принадлежит к числу простых, и среди ее следствий найдутся теоремы, обладающие большей непосредственной очевидностью; но в настоящее время такое положение дел нас не смущает: теорема касается частного факта; между тем как аксиома лежит в основе целой теории, как бы заключая ее в себе

в виде зародыша. Смысл и значение аксиомы выясняются по мере вывода из нее различных следствий.

Аксиома непрерывности высказывается для точек отрезка (в других случаях соответственные предложения уже можно доказать) и гласит примерно так:

IV. *Пусть точки данного отрезка разделены на 2 класса при соблюдении следующих условий:*

1) *каждая точка отрезка принадлежит одному из этих классов;*

2) *начало отрезка принадлежит I-му классу, а конец II-му;*

3) *любая точка I-го класса предшествует любой точке II-го класса в данном направлении.*

Тогда на данном отрезке имеется такая точка, что всякая точка его, предшествующая ей, попадает в I-й класс, а всякая точка, следующая за ней, попадает во II-й класс.

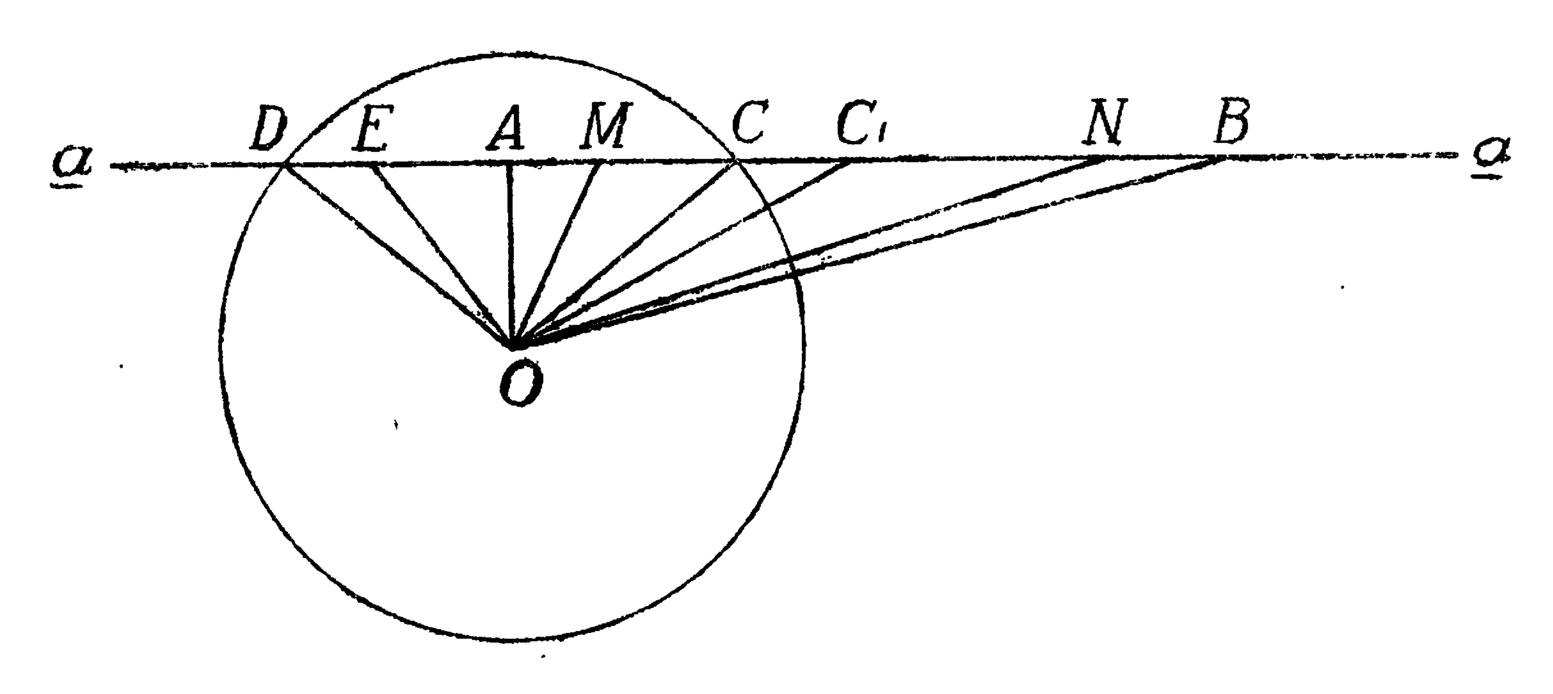
В аксиоме идет речь о предшествовании в данном направлении. Если начало отрезка — *A*, а конец — *B*, то речь идет о том направлении, в котором *A* прш *B*. Обозначим через *C* ту точку, существование которой было сейчас постулировано; об этой точке говорят, что она „производит данное деление". Сама эта точка может принадлежать тому или другому классу, — в зависимости от условий данного случая.

Далее можно доказать, что такая точка *C* — единственна; не останавливаясь на этом дополнении к аксиоме Дедекинда, приведем пример ее применения. Выше было указано предложение о пересечении окружности с прямою, которое доставляется нам имеющимся у нас смутным представлением о непрерывности. Но теперь геометрическая сущность этого представления выражена в виде отчетливой аксиомы; следовательно упомянутое предложение должно быть доказуемо с помощью этой аксиомы. Вот этот пример мы и разберем сейчас.

Теорема. Если одна точка прямой лежит внутри окруж-

ности, а другая — вне (но в плоскости окружности), то эта прямая пересекает окружность в 2-х точках.

Пусть дана окружность с центром в O и с радиусом, равным r, и прямая a, причем одна из ее точек E лежит внутри окружности, а другая точка B — вне окружности. Если прямая a проходит через центр окружности, то, откладывая на ней в обе стороны от точки O отрезки,



Черт. 61.

равные радиусу (III_4), получим 2 точки пересечения прямой с окружностью. В дальнейшем будем считать, что a не проходит через O. Опустим из O перпендикуляр на данную прямую (черт. 61), и пусть точка A — его основание; если A совпадает с E, то эта точка будет очевидно внутренней; если же A и E — различны, то, по известному свойству $\perp$-ра и наклонных, имеем:

$$(OA) < (OE);$$

но $(OE) < r$, ибо E лежит внутри окружности; след.:

$$(OA) < r,$$

и точка A во всяком случае лежит внутри окружности. В дальнейшем мы будем говорить об отрезке (AB).

Все точки этого отрезка разделим на 2 класса так, что в I-й класс попадут такие точки M, для которых:

$$(OM) < r,$$

а во II-й класс — такие точки N, для которых:

$$(ON) \geqslant r.$$

Ясно, что каждая точка отрезка (AB) попадает в один из классов, причем точка A будет отнесена в I-й класс, а точка B — во II-й. Таким образом первые два условия аксиомы Дедекинда здесь выполняются. Пусть, далее, M представляет какую-нибудь точку I-го класса, а N — II-го; из приведенных выше неравенств имеем:

$$(OM) < (ON).$$

Известная теорема о проекциях наклонных в таком случае дает:

$$(AM) < (AN),$$

причем оба эти отрезка являются частями (AB). При этих условиях точка M должна предшествовать точке N в направлении AB. Итак, все предпосылки аксиомы IV выполняются, а потому существует точка C, производящая указанное деление; надо доказать, что $(OC) = r$. Попробуем допустить противное и начнем с предположения:

$$(OC) < r;$$

тогда среди точек, следующих за C и потому принадлежащих II-му классу (аксиома IV), найдется такая точка C_1, что:

$$(CC_1) < r - (OC).$$

Из Δ-ка OCC_1, по известной теореме, имеем:

$$(OC_1) < (OC) + (CC_1),$$

или:

$$(OC_1) < (OC) + r - (OC)$$

$$(OC_1) < r;$$

тогда как для точки II-го класса должно быть:

$$(OC_1) \geqslant r.$$

Полученное противоречие заставляет отбросить сделанное допущение; точно также невозможно допустить, что $(OC) > r$. След.:

$$(OC) = r,$$

и точка C является общей точкой для прямой и окружности; другую точку пересечения D получим, как симметричную с C относительно A, что и требовалось доказать.

Подобным же образом можно доказать предложение о пересечении 2-х окружностей, частным случаем которого пользуется Евклид в своем I-м предложении. Далее мы в состоянии овладеть следующими вопросами: измерение отрезков, углов, двугранных углов, многогранных углов; относительное положение прямой и окружности; свойство касательной; относительное положение 2-х окружностей; простейшие задачи на построение; пересечение прямой и плоскости с шаром; пересечение шаров.

V. Аксиома параллелей.

Из предыдущих перечней читатель видит, что целый ряд существенных отделов геометрии еще не мог быть затронут, пока в нашем распоряжении были только аксиомы I—IV групп. Для того, чтобы завершить геометрию, надо принять определенное допущение о пересечении и непересечении прямых, лежащих в одной плоскости.

Параллельные прямые мы определим здесь, где идет речь об обосновании евклидовой геометрии, обычным

способом: это — прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся. Независимо от введения новой аксиомы, можно доказать, что через данную точку проходит прямая, параллельная данной прямой; соответствующее построение (при помощи проведения ⊥-ров) не раз применялось в предыдущей главе. Возникает вопрос о числе таких параллелей, и в геометрии Евклида постулируется следующее предложение:

V. *Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.*

Наметим те завершающие главы геометрии, изложение которых теперь становится для нас доступным: сумма углов Δ-ка; параллелограммы; углы, вписанные в окружность; правильные многоугольники; учение о подобии; измерение окружности; площади; параллельные прямые и плоскости; призмы; правильные многогранники; объемы.

Вспоминая определение геометрии Лобачевского, придем к следующим выводам: все, что было доказано при помощи одних аксиом I — IV, переносится в геометрию Лобачевского без всяких изменений; но вопросы, перечисленные после введения аксиомы V, получают там иное разрешение. При переходе к геометрии Римана придется сделать более глубокие изменения, вызванные замкнутостью прямой.

В изложенном очерке обоснования евклидовой геометрии были выделены, в числе 22-х, аксиомы, которые лежат в основе всех предложений геометрии. На ряду с этим, были введены 6 первоначальных понятий, к которым в конце концов и относились все утверждения аксиом. Наличие основных понятий, т.-е. таких понятий, которые вводятся без определений, влечет за собой интересные и важные следствия.

Припомним сначала указанные понятия вместе с их общей характеристикой:

„точка" . . . . простейший элемент геометрии,
„прямая" . . . известная совокупность или класс точек,
„плоскость" . . известная совокупность или класс точек,
„прш" . . . . отношение между точками одной прямой,
„равенство отрезков" . отношение между классами точек,
„равенство углов" . . отношение между классами точек.

Для дальнейшего чрезвычайно важно усвоить следующее простое положение: *основные понятия не определяются, а все, что нужно знать о них, выражено в аксиомах.* Сказанному не противоречит сделанная выше общая характеристика основных понятий. Дело заключается в том, что тот способ, каким они входят в аксиомы, сразу указывает, к какой логической категории надо отнести данное понятие; так, из аксиом сочетания мы непосредственно усматриваем, что „точки" являются элементами тех классов, которые носят название „прямых" и „плоскостей"; „предшествовать" есть отношение между точками прямой, и т. д. Отметить же эти логические категории весьма полезно для того, чтобы избежать многих неудачных попыток истолкования (см. ниже).

Подчеркнутое выше положение приводит к важному следствию: *под основными понятиями можно понимать какие-угодно объекты, лишь бы только при этом понимании оставались в силе все утверждения, сделанные в аксиомах.* Но тогда остаются в силе и все утверждения, делаемые в теоремах, и мы приходим к возможности истолковать геометрические предложения таким способом, который весьма далек от их обычного понимания.

Читатель не должен удивляться сказанному; ведь „чистая геометрия" есть отвлеченная система истин, разматывающихся по правилам логики из аксиом; те

пространственные представления, которые обычно связываются с понятиями: „точка“, „прямая“, „плоскость“ и т. д., — не имеют решающего значения, как это было выяснено выше: чертежи, модели и т. п. могут иметь лишь вспомогательное значение. Указанные пространственные образы сами являются одним из возможных истолкований отвлеченных понятий геометрии; это истолкование—самое древнее, долгое время почитавшееся за единственно возможное, и во всяком случае оно имеет исключительное значение. Помимо того, что мы почерпаем из него удобные и возможно точные иллюстрации к отвлеченным положениям чистой геометрии, рассматриваемое истолкование связывает евклидову геометрию с идеализированными образами прикладной геометрии, лежащей в основе всего нашего опыта. Тем не менее приходится признать, — и это будет сейчас доказано, — что указанное истолкование не является единственно возможным.

Если мы желаем получить какое-либо истолкование отвлеченной геометрической системы, то прежде всего надо выяснить, какие именно объекты подводятся в данном случае под основные понятия. Если при этом соблюдать принадлежность их к указанным выше логическим категориям, то можно застраховать себя от попыток, обреченных неизбежно на крушение; так, напр., если бы, не считаясь с этими заданиями, кто-либо условился под „точками“ понимать объекты x, а под „прямою“ — совокупность объектов y, не имеющих ничего общего с объектами x, то уже первая аксиома была бы нарушена, и такое истолкование пришлось бы отбросить. Итак, начинать приходится с сопоставления основных понятий с теми конкретными объектами, которые подводятся под них в данном истолковании; такое сопоставление покойный Пуэнкарэ очень удачно назвал „словарем“. Этот словарь можно распространить и на производные понятия; только

здесь уже необходимо считаться с определениями, которые связывают их с основными понятиями. Когда речь идет о том объекте, который в данном истолковании представляет „точку“, то очень часто называют его *псевдо-точкой*; точно также употребляются термины: *псевдо-прямая*, *псевдо-плоскость* и т. д.

Составив словарь, необходимо будет перейти к другой, не менее важной части работы, а именно — доказать, что при выбранном истолковании основных понятий все утверждения, сделанные в аксиомах, остаются в силе; это исследование кратко, но не совсем удачно называют иногда „доказательством аксиом“.

После того, как обе части работы выполнены, можно уже сказать, что удалось получить одно из возможных истолкований геометрии. Теперь можно с нашим словарем подойти к любой теореме и, с его помощью, перевести ее на новый язык; таким образом получится, вообще говоря, совершенно новое предложение, справедливость которого не нуждается в новом доказательстве. Изложенным путем можно из давно известных теорем извлекать без особого труда новые истины; так что подобные исследования не только являются „игрой ума“, но могут привести и к обогащению наших знаний. Недаром Пуэнкарэ однажды заметил, что математика есть искусство давать одно и то же название различным вещам.

Возможность различных истолкований геометрической системы, отличающихся от обычного, мы поясним на нескольких примерах; при этом материал для истолкований будем черпать из области наших обычных геометрических представлений.

Для первого примера вообразим себе, что около каждой точки нашего пространства описан шар с радиусом, равным единице длины; так как речь идет не о физических телах, а о геометрических, то их налегание друг на друга

никаких затруднений не вызывает. Итак, вообразим себе пространство, в котором каждая точка „раздулась“ в шар определенного размера. Каждая геометрическая фигура в конце концов является совокупностью точек, так что соответствующее разбухание произойдет и с любым геометрическим образом. Прямая даст совокупность шаров с радиусом $=1$ и с центрами, лежащими на данной прямой; легко видеть, что эти шары выполняют некоторую цилиндрическую трубочку. Точно также плоскость приведет к такой совокупности шаров, которые выполняют слой пространства между двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии $=2$; их центры лежат на плоскости, параллельной двум указанным выше и равноотстоящей от них, и т. д. Имея теперь в виду дать новое истолкование геометрической системы, условимся под псевдо-точками понимать построенные сейчас шары, под псевдо-прямыми — цилиндрические трубочки, под псевдо-плоскостями — указанные слои, и т. д. Одно-однозначность соответствия между точками обычного пространства и нашими шарами, а также исключительная простота перехода от точки к псевдо-точке позволяют без длинных рассуждений согласиться с тем, что на псевдо-точки, псевдо-прямые, псевдо-плоскости могут быть перенесены все те соотношения, которые имеют место между точками, прямыми и плоскостями; при этом упомянутая однозначность ручается за то, что никаких противоречий при перенесении не возникнет: сделав обратный переход, мы получили бы противоречие в обычном истолковании геометрии, которое считается застрахованным от этого. Так, о 2-х псевдо-точках некоторой псевдо-прямой мы скажем, что одна „предшествует“ другой, если в таком именно отношении находятся центры шаров, служащих данными псевдо-точками; точно также один псевдо-отрезок „равен“ другому, если равны обыкновен-

ные отрезки, образованные центрами тех шаров, которые и составляют данные псевдо-отрезки, и т. д. Словом, каждая аксиома и, вместе с сим, каждая теорема без труда переносятся на „пространство", состоящее из псевдо-точек; но все эти предложения получают новый смысл, отличающийся от того, который мы привыкли в них вкладывать. Таким образом, на ряду с обычным, возможно иное понимание геометрических теорем; с точки зрения чистой геометрии — другими словами, с отвлеченно-логической точки зрения — эти предложения не меняются; меняются же те наглядные представления, которые мы с ними связываем. Между прочим, последнее соображение ясно показывает, что наглядные представления не могут играть решающую роль в построении чистой геометрии*).

В работах покойного Е. С. Федорова, нашего выдающегося кристаллографа и геометра, тоже немалое значение придается возможности различных истолкований геометрических предложений; из этих работ назовем здесь „Новую геометрию" (СПБ. 1907) и ряд статей в „Записках Горного Института". В одной из последних, носящей заглавие: „Основные черты новой геометрии" (1912), автор усматривает в возможности различных истолкований одну из самых существенных особенностей новой геометрии и по этому поводу произносит замечательные слова: „Дайте нам новую теорему, и мы выведем из нее безграничное множество других!".

Мы заимствуем сейчас у Федорова одно истолкование, которое особенно интересно тем, что здесь трехмерная евклидова геометрия истолковывается с помощью фигур,

*) Намеченное в тексте истолкование читатель найдет в книге: Вебер-Вельштейн. „Основания геометрии" (в примечании редактора русского издания, проф. В. Ф. Кагана). Указанная книга уделяет значительное внимание вопросу о различных истолкованиях отвлеченной системы геометрии.

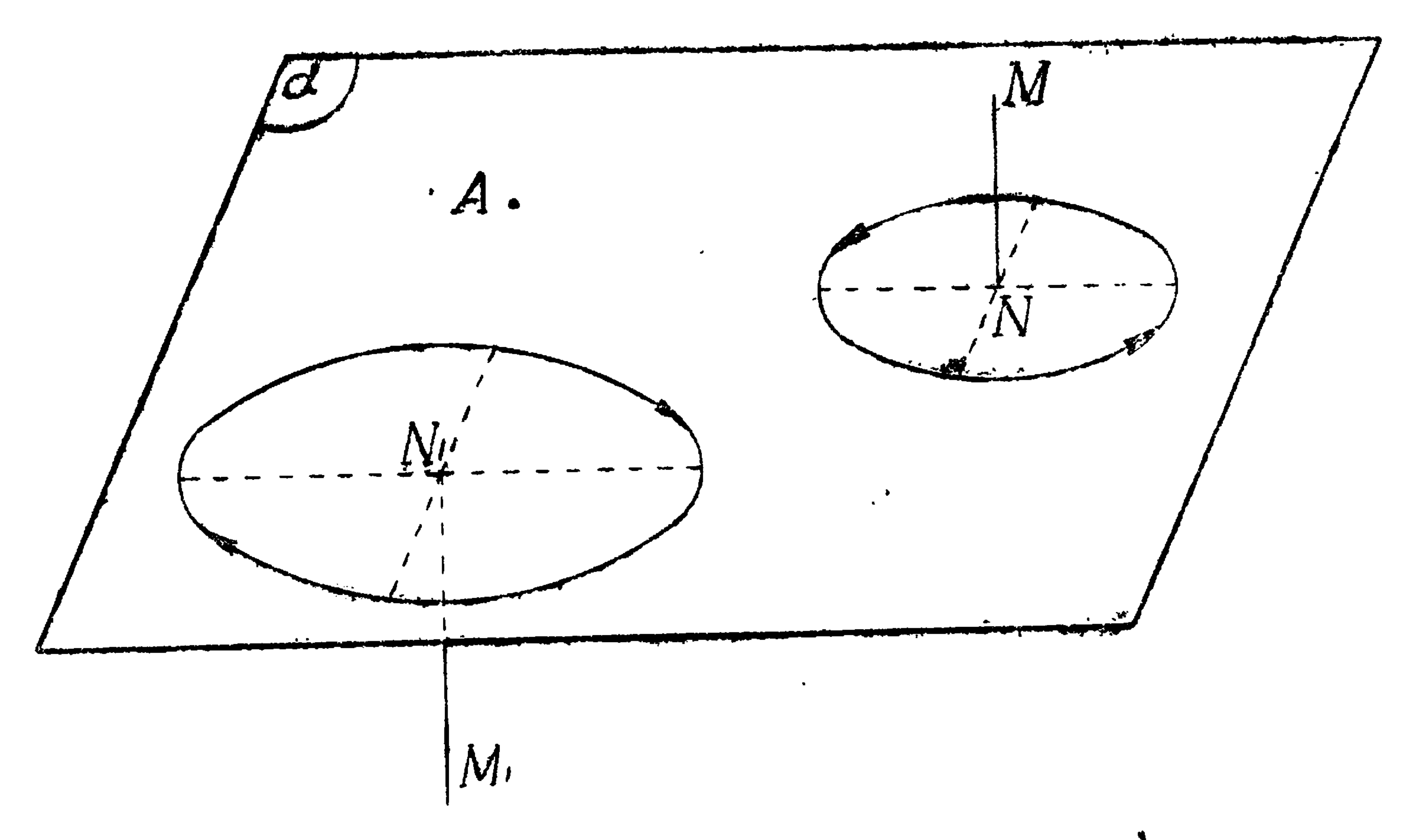
лежащих в одной и той же плоскости; именно, псевдоточками здесь служат круги упомянутой плоскости. Начнем с того, что установим одно-однозначное соответствие между этими кругами и точками полного пространства.

Возьмем в пространстве некоторую плоскость α (для удобства, ее можно представить себе горизонтальной). Для любой точки M трехмерного пространства построим следующим образом соответствующий круг в плоскости α: опустим на плоскость перпендикуляр MN и из его основания N, как из центра, опишем круг радиусом, равным расстоянию MN данной точки от плоскости (см. черт. 62). Для того, чтобы различить круги, получаемые от точек верхнего и нижнего полупространств, условимся приписывать окружностям различные направления пробега: если точка M лежит выше плоскости α, то соответствующую окружность представим себе описанной в таком направлении, что ограниченная ею площадь остается слева; если же точка M_1 лежит ниже плоскости α, то соответствующая окружность описывается так, что ограниченная ею площадь остается справа (на черт. 62 эти направления или „смыслы“ окружностей обозначены стрелками). После таких условий не только каждой точке пространства соответствует определенный круг плоскости α, но и обратно: если в плоскости α задан круг, то в его центре восставим перпендикуляр к плоскости в ту или другую сторону от нее, смотря по смыслу окружности круга, и, отложив на перпендикуляре отрезок, равный радиусу, получим вполне определенную точку.

Таким образом между точками пространства и *векториальными кругами* плоскости α устанавливается одно-однозначное соответствие („векториальными“ Е. С. Федоров называет круги, окружностям которых приписано определенное направление пробега); в частности, точкам

плоскости α соответствуют эти же самые точки, как круги нулевого радиуса.

Установленное однозначное соответствие уже показывает, что всю геометрию трехмерного пространства можно истолковать на фигурах плоскости α, если только условиться под псевдо-точками понимать векториальные круги этой плоскости. В самом деле, каждое предложение гео-

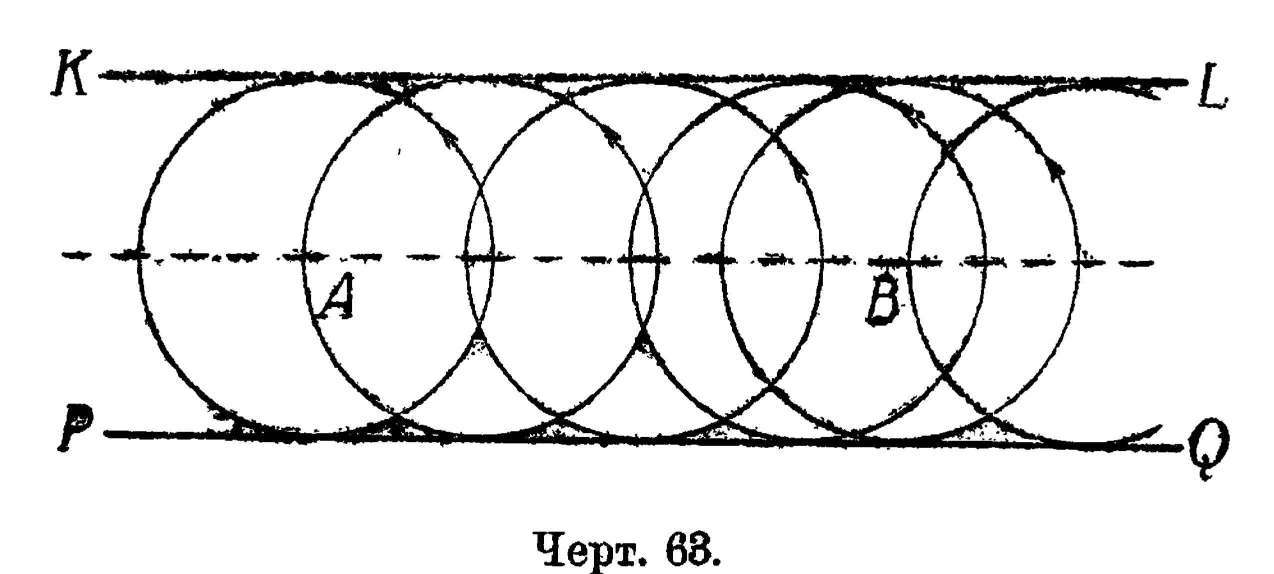


Черт. 62.

метрии, будет ли то аксиома или теорема, в конце концов относится к точкам; подставляя вместо них соответствующие векториальные круги, получаем новое истолкование; однозначность ручается за возможность провести это истолкование без всяких исключений. Войдем в некоторые подробности и прежде всего выясним, какие фигуры плоскости α послужат псевдо-прямыми и псевдо-плоскостями.

На основании однозначного соответствия, установленного выше, строить псевдо-прямую надо следующим образом: возьмем какую-нибудь прямую обыкновенного пространства и для каждой ее точки построим соответ-

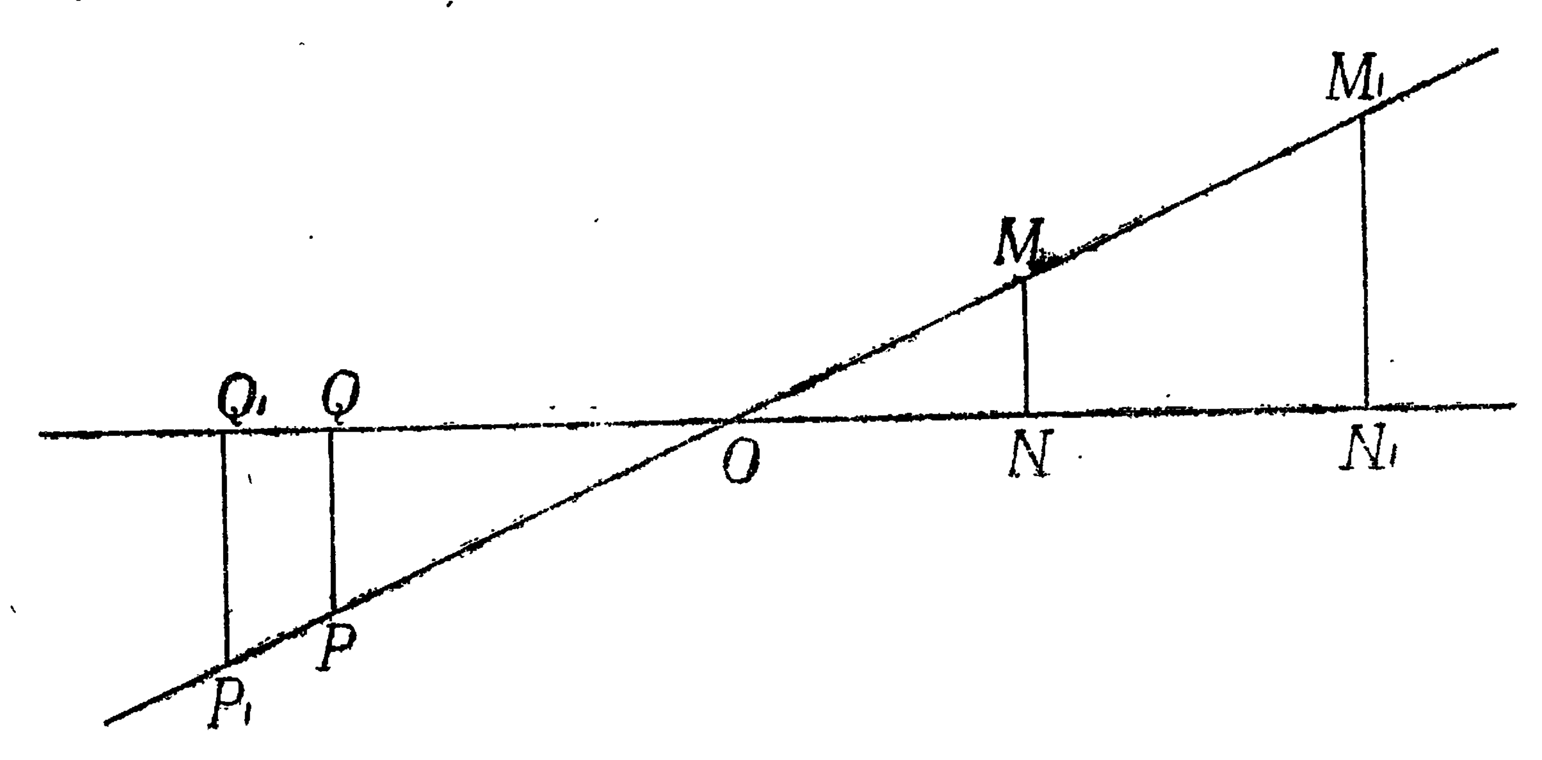
ствующий векториальный круг; геометрическое место последних даст нам псевдо-прямую. Рассмотрим различные случаи. Если прямая лежит в плоскости α, то она будет тожественна с соответствующей псевдо-прямой, ибо точкам плоскости α отвечают сами эти же точки, как круги нулевого радиуса. Возьмем теперь прямую, не лежащую в плоскости α; чтобы получить векториальные круги, соответствующие точкам данной прямой, надо опустить из них перпендикуляры на плоскость α; основания этих $\perp$-ров, служащие центрами кругов, будут лежать тоже на прямой, которая является проекцией данной прямой на



Черт. 63.

плоскость α. В одном, впрочем, случае эта проекция сведется к точке, а именно — тогда, когда данная прямая будет $\perp$-на к плоскости α; очевидно, все векториальные круги будут иметь общий центр, но различные радиусы, в зависимости от высоты соответствующей точки. Следовательно прямая, перпендикулярная к плоскости α, в рассматриваемом истолковании изобразится пучком концентрических кругов; каждый из них придется рассматривать как два различных векториальных круга: при одном смысле он изобразит точку, лежащую на известном расстоянии выше плоскости α, а при обратном смысле — точку, лежащую на том же самом расстоянии ниже плоскости α (черт. 62 может и здесь помочь читателю).

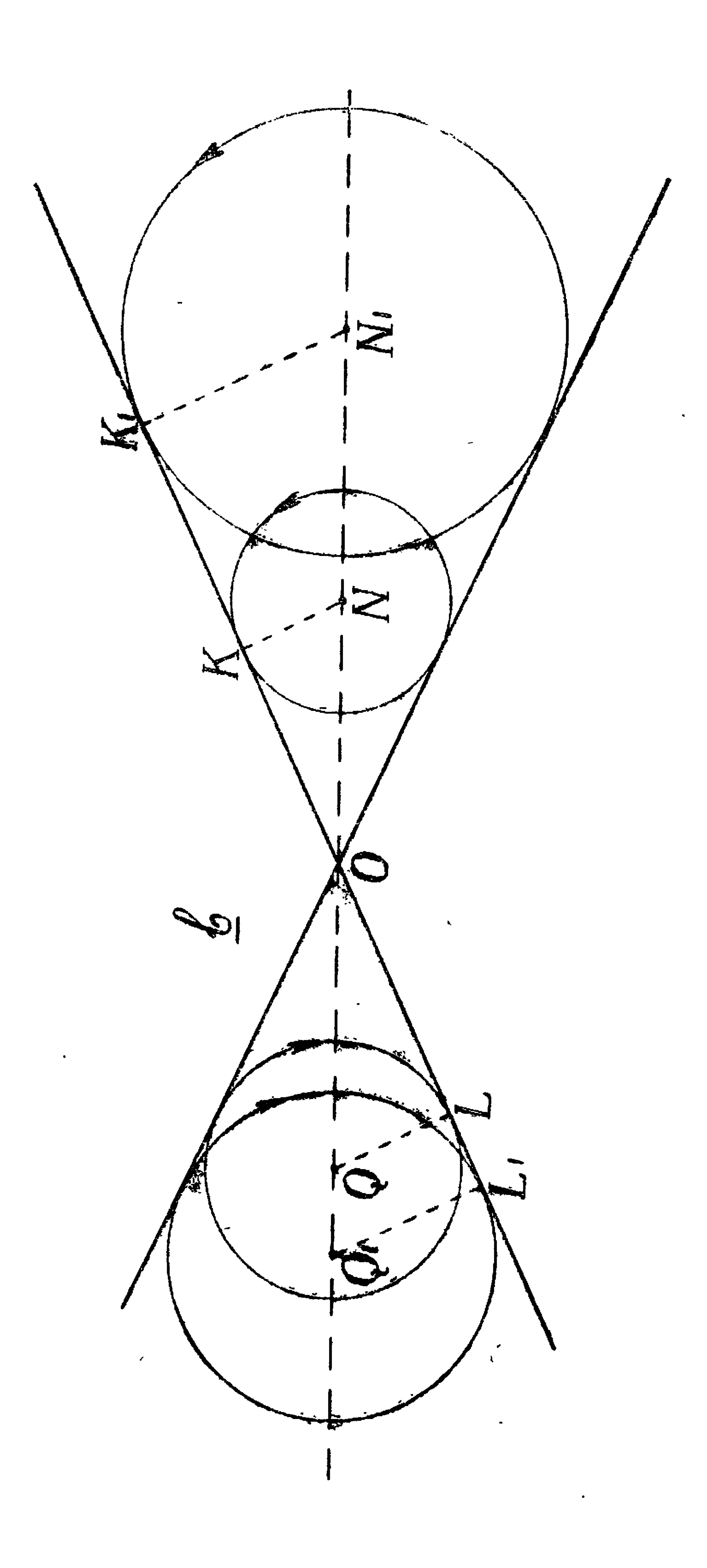
Во всех остальных случаях проекция прямой будет прямая, и геометрическим местом центров искомых векториальных кругов послужит как раз эта проекция. Если данная прямая параллельна плоскости α, то все ее точки отстоят от этой плоскости на одном и том же расстоянии; следовательно радиусы всех соответствующих кругов будут равны между собой. Итак, прямая, параллельная плоскости α, изобразится совокупностью векториальных кругов, представленной на черт. 63; здесь AB — линия



Черт. 64 *a*.

центров, и все круги имеют один и тот же смысл, ибо соответственные точки все лежат по одну и ту же сторону от плоскости; легко видеть, что полученная совокупность векториальных кругов имеет 2 общие касательные KL и PQ. Перейдем, наконец, к случаю прямой, пересекающей плоскость α в точке O.

На черт. 64*a* представлена данная прямая PM и ее проекция QN (чертеж, следовательно, сделан в плоскости, перпендикулярной к α). На черт. 64*b* изображены фигуры плоскости α, и здесь снова повторяется проекция QN. Вышеупомянутая точка O лежит и на этой проекции; ей



Черт. 64 b.

соответствует нулевой круг, т.-е. сама точка O. Для всякой же другой точки M нашей прямой соответствующий векториальный круг строится следующим образом: опускаем $\perp$-р MN (черт. a) и из точки N, как из центра, описываем круг радиусом $NK = NM$ (черт. b); необходимо еще снабдить его определенным смыслом, согласно указанным выше правилам. Подобным же образом построим векториальные круги, соответствующие точкам M_1, P, P_1 и т. д. Отношение радиуса круга к расстоянию его центра от точки O есть величина постоянная; действительно, из подобных Δ-ков (черт. a) имеем:

$$\frac{NM}{ON} = \frac{N_1M_1}{ON_1} = \frac{QP}{OQ} = \frac{Q_1P_1}{OQ_1} = \dots\dots\dots;$$

легко видеть, что эта постоянная равна тангенсу угла MON. Если $\operatorname{tg} \angle MON < 1$ (т.-е. $\angle MON < 45°$ — случай чертежа 64), то точка O лежит вне получаемых векториальных кругов, и можно говорить о касательных к нашим кругам, проведенных из этой точки. Нетрудно доказать, что касательная OK к кругу N окажется касательной и к остальным построенным кругам; докажем это для круга N_1. На основании предыдущего, имеем:

$$\frac{NK}{ON} = \frac{N_1K_1}{ON_1},$$

так что:

$$\Delta\, ONK \sim \Delta ON_1K_1,$$

откуда:

$$\angle\, KON = \angle\, K_1ON_1\ ;$$

а потому прямые OK_1 и OK должны совпасть в одну.

Таким образом в рассматриваемом общем случае псевдо-прямая изображается такой совокупностью векториальных кругов, которые имеют 2 общие касательные, пересекающиеся в точке O; сама эта точка называется

центром подобия, а совокупность кругов — *пучком*. Говорят еще, что точка O будет центром прямого подобия для векториальных кругов одного смысла, как, напр.: N и N_1, Q и Q_1; она же будет центром обратного подобия для векториальных кругов обратных смыслов, как, напр., N и Q, N_1 и Q_1 и т. д.

Если же $\operatorname{tg} \angle MON = 1$ (т.-е. $\angle MON = 45°$), то:

$$NK = ON\,,\ N_1K_1 = ON_1\,,\ QL = OQ, \ldots\ldots;$$

тогда построенные векториальные круги касаются друг друга в точке O — их центре подобия.

Если, наконец, $\operatorname{tg} \angle MON > 1$ (т.-е. $\angle MON > 45°$), то:

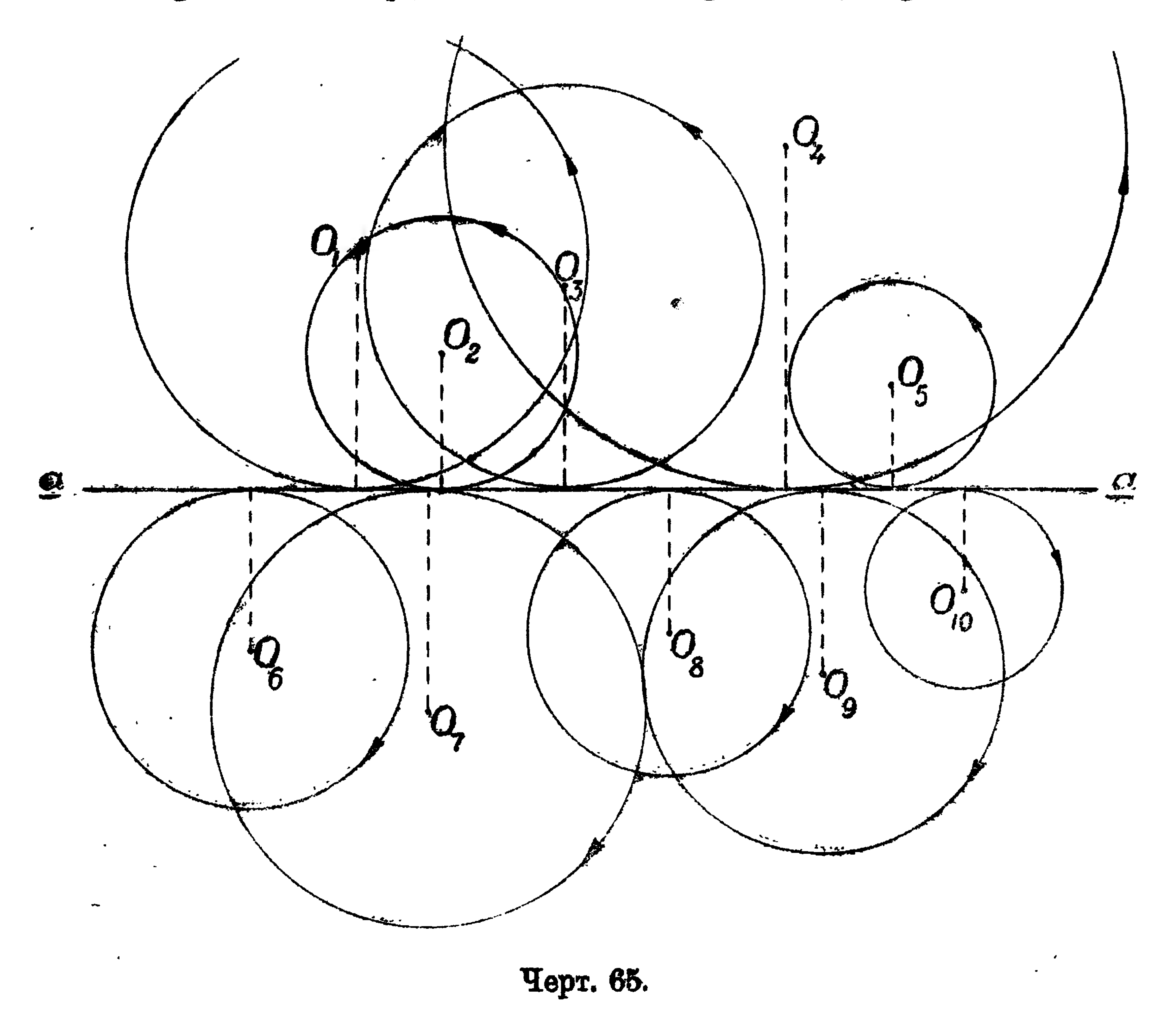
$$NK > ON,\ \ N_1K_1 > ON_1 \text{ и т. д.};$$

точка O лежит теперь внутри всех кругов, а потому об общих касательных говорить нельзя. Однако основное свойство пучка векториальных кругов — постоянство вышеуказанного отношения — остается в силе, и точка O попрежнему называется центром подобия.

Собирая все эти случаи, можно сказать, что в истолковании Федорова псевдо-прямая представляется тем или другим пучком векториальных кругов. Зная это, уже нетрудно решить задачу о построении псевдо-прямой, проходящей через 2 данные псевдо-точки; для ее решения придется прежде всего построить соответствующий центр подобия, а такие построения обыкновенно рассматриваются в элементарной геометрии.

Переходим к псевдо-плоскости. Возьмем сначала обыкновенную плоскость, параллельную плоскости α; ее точкам соответствуют векториальные круги одного и того же радиуса, но с центрами во всевозможных точках плоскости α. Итак, плоскости, параллельной α, соответствует совокупность всевозможных кругов плоскости α, имею-

щих один и тот же радиус и один и тот же смысл; в частности, сама эта плоскость тожественна со своим изображением. Далее рассмотрим плоскость β, пересекающую α по прямой a. Если $\beta \perp \alpha$, то центры всех векториальных кругов лежат на прямой a, а радиусы —



Черт. 65.

произвольны; в противном случае центрами искомых кругов послужат всевозможные точки плоскости α, а радиусы опять-таки определятся из постоянства их отношения к расстояниям соответствующих центров от прямой a. На черт. 65 изображена псевдо-плоскость, соответствующая плоскости, пересекающей α по пря-

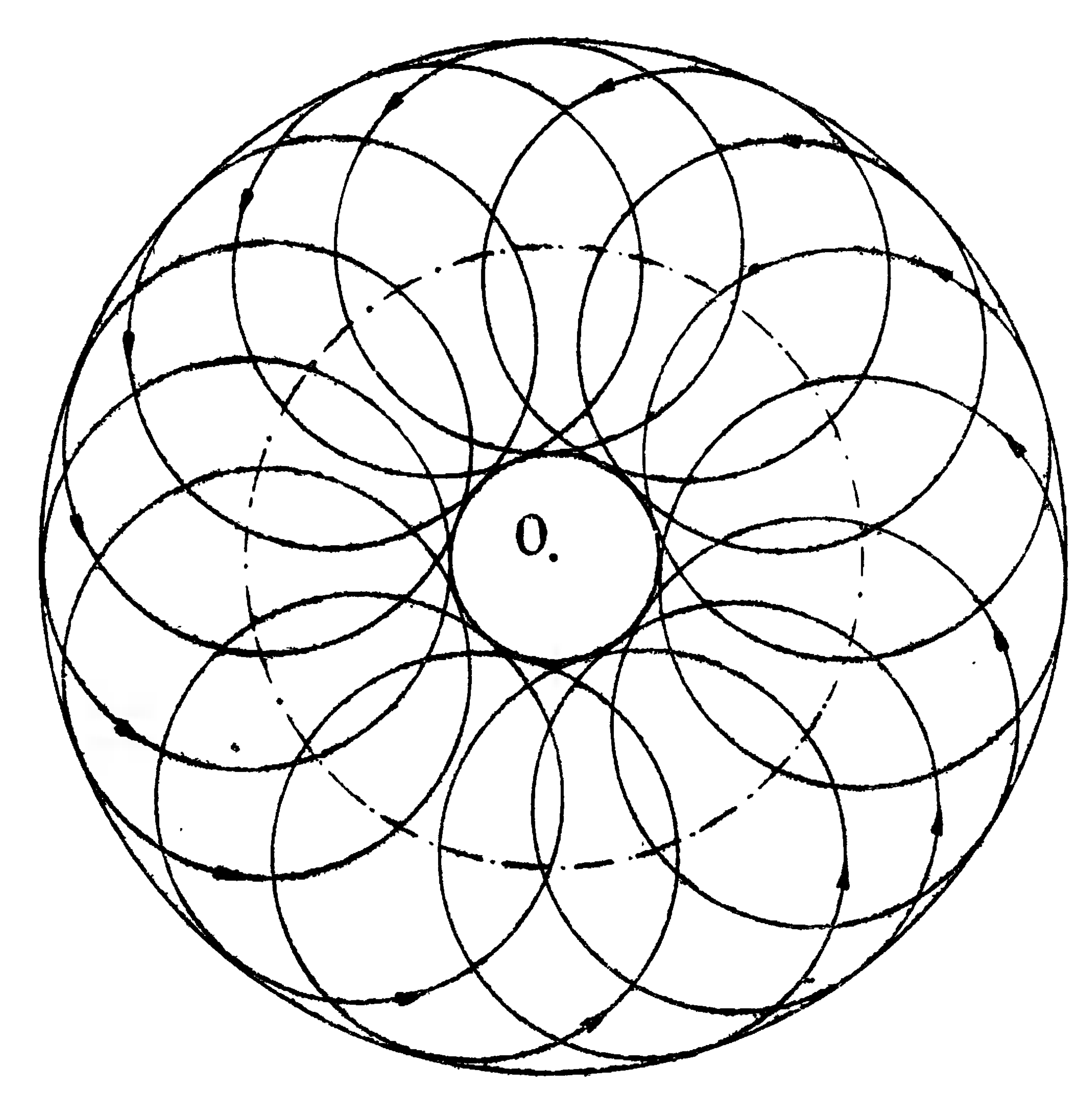
мой *a* под углом в 45°; тогда радиусы векториальных кругов равны расстояниям их центров от прямой *a*, т.-е. все эти круги касаются прямой *a*. Итак, псевдо-плоскость в данном случае изобразится совокупностью всевозможных кругов плоскости *α*, касающихся прямой *a*; им приписывается тот или другой смысл, смотря по тому, с какой стороны от прямой *a* лежат их центры. Подобные совокупности называются *связками* векториальных кругов, а прямая *a* — *осью подобия*.

Мы убедились, что псевдо-точками служат векториальные круги, псевдо-прямыми — пучки таких кругов, а псевдо-плоскостями — их связки. В силу однозначности соответствия, нетрудно убедиться, что, при таком понимании основных понятий, аксиомы сочетания остаются в силе; так, напр., утверждение: „если 2 точки прямой лежат в плоскости, то прямая целиком лежит в этой плоскости" остается верным и тогда, когда входящие сюда образы заменим псевдо-образами. Действительно, если все точки прямой лежат в некоторой плоскости, то соответствующие им векториальные круги будут входить в ту более широкую совокупность, которая представляет названную плоскость в истолковании Федорова. Таким образом выбранная нами аксиома сохраняет свою силу при новом понимании основных понятий; то же самое относится и к другим аксиомам сочетания.

Понятие „прш" истолковывается совершенно естественным образом: одна псевдо-точка „предшествует" другой, если в таком именно отношении находятся соответствующие им обыкновенные точки; совершенно ясно, что аксиомы расположения остаются в силе и т. д. и т. д.

Выясним еще, как представится окружность; для этого, по известным уже правилам, построим для каждой ее точки соответствующий векториальный круг и возьмем совокупность последних. Если окружность лежит

в плоскости, параллельной α, и если ее радиус больше расстояния между плоскостями, то псевдо-окружность будет совокупностью векториальных кругов, изображенною на черт. 66. Центры этих кругов лежат на окружности, начерченной прерывной линией, а сами они



Черт. 66.

касаются 2-х концентрических окружностей (не принадлежащих к рассматриваемой совокупности).

Таким образом каждое понятие и каждое предложение геометрии получает новое значение, если вместо точек подставим туда псевдо-точки, и т. д. Если к тому же вспомнить те образы, которые представляют собою

псевдо-точки, псевдо-прямые и т. п., то из каждой теоремы геометрии можно извлечь предложение, относящееся к векториальным кругам и к их различным совокупностям, и таким путем можно расширять свои геометрические знания. Так, напр., весьма простые предложения: „две прямые одной плоскости вообще имеют общую точку", а „две скрещивающиеся прямые общих точек не имеют"—в переводе при помощи нашего словаря дают следующее: если два пучка векториальных кругов плоскости α входят в состав одной и той же связки, то они вообще имеют один общий круг; в противном же случае у них общих кругов нет. Возьмем, далее, в плоскости α три круга одного и того же радиуса и одного и того же смысла (мы останавливаемся на этом частном случае, имея в виду рассуждение, связанное с черт. 66); переходя к соответствующим точкам пространства, построим определяемую ими обыкновенную окружность. Этой последней соответствует известная псевдо-окружность, содержащая три данных круга и вообще состоящая из кругов, касающихся 2-х определенных окружностей одинаковым образом. Следовательно доказано предложение: если в плоскости даны три равных круга, то существуют две окружности, касающиеся всех данных, каждая одинаковым образом. Здесь мы имеем решение одного частного случая знаменитой задачи Аполлония о построении круга, касающегося 3-х данных.

Изложенное истолкование проф. Федоров иногда видоизменяет, говоря не о векториальных кругах, а о векторах, т.-е. о направленных отрезках. В обеих формах это истолкование замечательно тем, что позволяет всю геометрию трехмерного пространства осуществить на плоскости; в частности, любой пространственный предмет можно воспроизвести на плоскости при помощи векторов или векториальных кругов. Федоров считает

даже этот метод очень удобным для применения в горном деле.

Отмеченная особенность разобранного истолкования наводит на смелую мысль: если система кругов плоскости осуществляет геометрию трехмерного пространства, то нельзя ли воспользоваться совокупностью всевозможных шаров для того, чтобы проникнуть в тайны пространства 4-х измерений? Прежде всего заметим, что все мистическое в вопросе о четырехмерном пространстве—и, надо сознаться, самое интересное в нем — уже выходит за пределы математики; с чисто же геометрической точки зрения дело обстоит просто и довольно прозаически: речь идет о распространении отношений, наблюдаемых в трехмерном пространстве, на более широкую совокупность — подобно тому, как в свое время мы перешли от плоскости к пространству 3-х измерений. И действительно, в этом вопросе система шаров может оказать большое подспорье: для полного задания шара необходимо задание 4-х величин (3 координаты центра и радиус), так что шары можно однозначно связать с точками 4-х-мерного пространства. Е. С. Федоров изучает различные совокупности шаров и таким образом знакомится с геометрией пространства 4-х измерений. Здесь особенно интересно то, что, благодаря шарам, наглядность проникает туда, куда, казалось бы, вход ей по существу дела навсегда воспрещен. Выходит, что точка зрения чистой геометрии, отнимая у наглядности решающее значение, в то же самое время значительно расширила ту область, где может принести пользу ее вспомогательная и наводящая роль.

За другими истолкованиями мы отсылаем читателя к книге Вебер-Вельштейна; ознакомившись с ними, он согласится со словами Федорова о безграничных возможностях в истолковании геометрических теорем. Раз-

личные же истолкования позволяют извлекать из любой теоремы все новые и новые истины; так что строго-логическое обоснование геометрии, которое и делает возможными различные ее истолкования, несмотря на свою кропотливость и кажущуюся мелочность, вполне соответствует началу экономии мысли.

Среди других истолкований особое место занимает так наз. *аналитическое* истолкование. Дело заключается в том, что на предыдущих страницах были указаны некоторые истолкования, весьма отличающиеся от обычного, но все-таки имеющие дело с пространственными образами: псевдо-точками служили или шары, или векториальные круги, или векторы — при возможности связать с этими терминами обычные пространственные представления. Оказывается, что можно дать такое истолкование геометрии, которое уже не будет заключать в себе решительно ничего пространственного; делается это следующим образом.

Условимся под псевдо-точкой понимать тройку вещественных чисел:

$$(x, y, z),$$

взятых в определенном порядке; тогда „пространство“ окажется совокупностью всевозможных таких троек. Далее, псевдо-плоскость слагается из тех псевдо-точек, которые являются решениями неопределенного уравнения с 3 неизвестными:

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

псевдо-прямая же является совокупностью псевдо-точек, общих 2-м псевдо-плоскостям, и т. д. На первый взгляд может показаться, что здесь просто идет речь об аналитической геометрии; но этого не должно быть, и этого действительно нет. Не должно быть потому, что аналити-

ческая геометрия предполагает уже некоторые элементарно-геометрические сведения; а так как последние при обычном изложении связываются с пространственными представлениями, то это же самое придется сказать и об аналитической геометрии; а ведь мы ищем истолкования, не связанного с пространственными представлениями. Но в указанных исходных положениях вовсе и нет тожества с методом аналитической геометрии. Действительно, с точки зрения последней, „точка" есть простейший элемент пространства, положение которого определяется с помощью трех чисел; в указанном же истолковании псевдо-точка *есть* тройка вещественных чисел и — ничего больше. Точно также в аналитической геометрии плоскость является основным образом, с которым обычно связываются известные пространственные представления; а с помощью неопределенного уравнения определяется лишь положение данного образа в пространстве. В аналитическом же истолковании плоскость *есть* не что иное, как совокупность решений неопределенного уравнения. Таким образом обе точки зрения принципиально различны.

В книге Вебер-Вельштейна шаг за шагом развертывается это аналитическое истолкование, и читатель приходит к такому пониманию геометрических теорем, в котором уже ничего пространственного нет и не может быть. Вот в этом полном разрыве с реальным пространством и заключается принципиальная важность аналитического истолкования. Оно показывает, что чистая геометрия может действительно строиться вне этой связи; а если мы к ней все еще прибегаем, то тут с одной стороны действует сила привычки, а с другой — серьезная вспомогательная роль пространственных представлений.

Аналитическое истолкование интересно еще тем, что оно может нам доставить доказательство совместности

аксиом, о чем шла речь выше. В самом деле, если мы докажем, что все утверждения аксиом остаются в силе при аналитическом истолковании входящих туда терминов, — а в указанной книге это доказательство имеется, — то можно построить следующее рассуждение. Допустим, что из наших аксиом когда-либо удастся вывести два предложения, друг другу противоречащие; но так как каждое предложение геометрии осуществляется в построенном выше аналитическом пространстве, то противоречие это скажется и там; т.-е. получается в конце концов противоречие в самом анализе. Следовательно, поскольку считать последний уже обоснованным и застрахованным от противоречий, можно утверждать совместность аксиом евклидовой геометрии, другими словами — считать эту геометрию логически-возможной. Условный ответ не должен смущать читателя, ибо всякое доказательство основывается на каких-либо предпосылках, которые его и обусловливают.

Оглядываясь на пройденный путь, мы видим, что геометрия, получив начало в практических, находимых ощупью предписаниях египетских землемеров, вылилась в наше время в отвлеченно-логическую систему, не связанную необходимым образом даже с идеализированными данными пространственного представления. Мы берем несколько понятий без определения и несколько предложений без доказательства, а все остальное определяем и доказываем по правилам формальной логики; в выборе исходных понятий и предложений мы свободны, поскольку эта свобода согласуется с теми ограничениями обще-логического характера, о которых шла речь выше.

При таком положении дела, естественно возникает вопрос: чем же собственно геометрия отличается от других отделов математики или даже от других умозритель-

ных наук? Геометрия изучает свойства пространства; но для чистой геометрии „пространство“ есть не что иное, как совокупность всевозможных точек, т.-е. в сущности оно совпадает с понятием класса. Классы бывают различные, и различные пространства отличаются друг от друга теми отношениями, которые устанавливаются в аксиомах между точками; вот в этих отношениях и заключается суть дела. Стоя на подобной точке зрения, Рессель дает такое определение геометрии: „*геометрия есть изучение рядов двух и большего числа измерений*“. Здесь действительно указаны существенные черты геометрических исследований, главное поле которых мы видим на плоскости и в пространстве. Надо, однако, заметить, что и ряд одного измерения не остается совсем без внимания: разбирая расположение точек на прямой, мы занимаемся подобным рядом.

Выбирая различным образом аксиомы, мы можем строить различные системы чистой геометрии; так, мы знаем уже 3 геометрии: Евклида, Лобачевского, Римана. Какой же системой мы воспользуемся в прикладной геометрии? До сих пор евклидова геометрия удовлетворяла всем требованиям и признавалась за систему, выражающую свойства реального пространства; в настоящее время наше миропонимание переживает серьезный кризис.

Принцип относительности привел к тому, что пространство и время, дотоле резко различавшиеся, объединяются в один „четырехмерный мир“ (Минковский). То, что прежде объяснялось силами, теперь сводится к геометрическим свойствам пространства; изучение геометрии получает особое значение, причем выясняется важность именно геометрии Римана (в обобщенной постановке). Таким образом отвлеченные умозрения о многомерных пространствах и о неевклидовых геометриях получают животрепещущий интерес.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА

SHEBA.SPB.RU/ZA

Хочу всё знать (теория)

Юный техник (практика)

Домоводство (условия)